

1921.

MAR 19 1921

No. 3.

GEN. LIBRARY
MAR 21 1921

UNIV. OF

ANNALEN DER PHYSIK.

BEGRÜNDET UND FORTGEFÜHRT DURCH

F. A. C. GREN, L. W. GILBERT, J. C. POGGENDORFF, G. U. E. WIEDEMANN, P. DRUDE.

VIERTE FOLGE.

Band 64. Heft 3.

DER GANZEN REIHE 360. BANDES 3. HEFT.

KURATORIUM:

M. PLANCK, G. QUINCKE,
W. C. RÖNTGEN, E. WARBURG.

UNTER MITWIRKUNG

DER DEUTSCHEN PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT

HERAUSGEGEBEN VON

W. WIEN UND M. PLANCK.



LEIPZIG.

VERLAG VON JOHANN AMBROSIIUS BARTH.

DÖRRIENSTRASSE 16.

*acc 9/7/21
titled*

Bestellungen auf die „Annalen“ werden von allen Buchhandlungen und von der Verlagsbuchhandlung angenommen. Im Jahre 1921 erscheinen Bd. 64, 65 und 66 à 8 Hefte. Preis von Bd. 64 M. 60.—.
Nach dem Ausland in der Währung des betr. Landes.

Ausgegeben am 9. Februar 1921.

Inhalt.

| | Seite |
|--|-------|
| 1. Richard Gans und Ramón G. Loyarte. Die Permeabilität des Nickels für schnelle elektrische Schwingungen. (Nach Messungen von Loyarte.) | 209 |
| 2. Richard Gans. Die Permeabilität des Nickels für kurze Hertzsche Wellen und die Messungen von Arkadiew . . | 250 |
| 3. P. P. Ewald. Die Berechnung optischer und elektrostatischer Gitterpotentiale | 253 |
| 4. Thea Krüger. Über die Ionisierungsarbeiten und die Dissoziationsarbeit des Wasserstoffs | 268 |

Die Redaktion der Annalen wird von den umseitig genannten Herren besorgt. Den geschäftlichen Teil hat Herr Geh. Hofrat Prof. W. Wien übernommen, an den auch Manuskripte zu senden sind. Seine Adresse ist: München, Leopoldstraße 91.

Es wird gebeten, die Manuskripte **druckfertig** einzuliefern und in den Korrekturen den beim Druck für sie verwendeten Raum nicht zu überschreiten.

Für die Aufnahme von Dissertationen gelten besondere Bedingungen, welche vom Verlag bekannt gegeben werden.

Die Verlagsbuchhandlung liefert 100 **Sonderabdrücke** jeder Arbeit kostenfrei. Falls ausnahmsweise mehr gewünscht werden, so muß dies bei Rücksendung des ersten Korrekturbogens an die Druckerei auf dessen erster Seite bemerkt werden. Alle anderen, die Sonderabdrücke betreffenden Mitteilungen bittet man an die Verlagsbuchhandlung zu richten.

Anderweitiger Abdruck der für die Annalen bestimmten Abhandlungen oder Übersetzung derselben innerhalb der gesetzlichen Schutzfrist ist nur mit Genehmigung der Redaktion und Verlagsbuchhandlung gestattet.

Die **Zeichnungen** sind in möglichst sorgfältiger Ausführung den Abhandlungen auf besonderen Blättern beizulegen (nicht in das Manuskript selbst einzuzichnen). Da die Figuren fortan möglichst in den Text eingefügt werden sollen, ist die Stelle des Manuskriptes recht genau anzugeben, wo sie hingehören.

Zitate sind am Rande oder unten auf den Seiten des Manuskriptes (nicht in dem Text selbst) und zwar möglichst in der in den „Fortgeschritten der Physik“ üblichen Form mit Angabe des Namens und Vornamens, der Band-, Seiten- und Jahreszahl aufzuführen.

ri
ve
S
L

ge
H
a
in
n
w
e
d
t
s
d
d
V
e

c

A

2

3

4

5

6

7

8

9

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 64.

1. *Die Permeabilität des Nickels für schnelle elektrische Schwingungen*¹⁾;

von *Richard Gans und Ramón G. Loyarte.*

(Nach Messungen von Loyarte.)

Die Kenntnis der Permeabilität ferromagnetischer Materialien in ihrer Abhängigkeit von der Schwingungszahl ist von Interesse, weil sie auf die molekulare Konstitution dieser Stoffe, insbesondere auf den Mechanismus der Magnetisierung Licht zu werfen gestattet.

Nun liegen ja allerdings bereits viele Arbeiten²⁾ über den genannten Gegenstand vor, doch genügen dieselben nicht im Hinblick auf den erwähnten theoretischen Zweck, und zwar aus den folgenden Gründen. Erstens hat jeder Forscher nur in einem kleinen Wellenlängengebiet gearbeitet; es ist aber nicht möglich, Resultate, die so heterogen bezüglich des verwendeten Materials und der benutzten Methode sind, miteinander zu vergleichen. Einer arbeitet mit ziemlich ungedämpften Schwingungen, bei anderen ist das Dekrement beträchtlich, bei dem einen ist die Feldstärke groß, bei anderen sehr klein, ein Einfluß derselben aber ganz unzweifelhaft³⁾, die einen messen Mittelwerte des Effektivwertes, andere anders definierte Größen, die meisten haben nicht in genügender Weise den Einfluß der Foucaultströme berücksichtigt oder eliminiert.

Neuerdings hat Arkadiew⁴⁾ Messungen mit sehr kurzen

1) Vgl. Ramón G. Loyarte, *Contribución al estudio de las ciencias*. Univ. Nacional de La Plata **1**. S. 451. 1917; **2**. S. 103. 1917.

2) J. Klemenčič, *Wied. Ann.* **53**. S. 707. 1894; J. Zenneck, *Ann. d. Phys.* (4) **12**. S. 869. 1903; A. Batelli u. L. Magri, *Physik. Zeitschr.* **8**. S. 298. 1907; L. Schames, *Ann. d. Phys.* (4) **27**. S. 64. 1908; O. Bonazzi, *Publicazioni dell' Istituto di Fisica dell' Università di Pisa* 1910.

3) Vgl. H. Zahn, *Verh. d. Deutsch. Physik. Ges.* **11**. S. 185, 377. 1909.

4) W. Arkadiew, *Physik. Zeitschr.* **14**. S. 561. 1913.

elektrischen Wellen (von 727 cm bis herab zu 1,3 cm) anstellt. Er beobachtet ein Verschwinden der ferromagnetischen Eigenschaften bei so schnellen Schwingungen und gibt, um das anschaulich zu machen, eine graphische Darstellung der Permeabilität μ als Funktion der Wellenlänge λ , indem er $\log \lambda$ als Abszisse aufträgt, und benutzt zu dieser Figur nicht nur seine eigenen Beobachtungen, sondern auch die anderer Forscher. Wir reproduzieren sein Diagramm in Fig. 1.

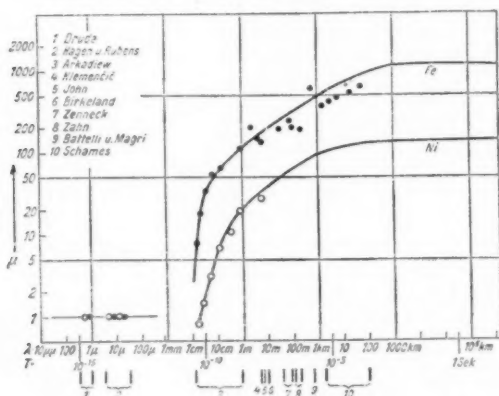


Fig. 1.

Über die Art, wie die Messungen angestellt sind, gibt er leider keine Einzelheiten, er scheint jedoch die Absorption in zwei parallelen Metalldrähten benutzt und nach einer auch nicht angegebenen Formel Absorptionskoeffizienten berechnet zu haben.

Da nicht nur die Schwingungszahl, sondern auch das Dämpfungsverhältnis auf die Permeabilität bei kurzen Wellen einen großen Einfluß hat, wäre es wünschenswert gewesen, daß er das Dekrement bestimmt und gezeigt hätte, ob und wie er es in Rechnung gezogen hat. Wir vermuten, daß letzteres nicht geschehen ist, trotzdem er wahrscheinlich mit recht gedämpften Schwingungen operiert hat.¹⁾

1) Nach einer Arbeit zu schließen, in der er ähnliche Probleme behandelt. Ann. d. Phys. 45. S. 133. 1914, wo die Dämpfungsverhältnisse zwischen 1,35 und 1,46 liegen.

Er berücksichtigt ferner nicht, daß, wie wir weiterhin zeigen werden, zwischen der Feldstärke H und der Induktion B bei kurzen Wellen eine Phasendifferenz auftritt, daß er also gar nicht μ berechnet, und man kann sich infolgedessen kein Bild machen, welche Größe er eigentlich beobachtet hat.

Schließlich vergleicht er in seiner Figur die für sehr schwache Felder gültigen μ -Werte bei schnellen Schwingungen mit Permeabilitäten bei geringer Periodenzahl, die zu endlichen Feldstärken gehören. (Bei Nickel nimmt er im stationären Fall z. B. $\mu = 150$, während der zum Vergleich heranzuziehende Wert etwa 12 wäre.)

Das sind einige von den Gründen, die es wünschenswert erscheinen lassen, das Problem von neuem experimentell und theoretisch in Angriff zu nehmen, und zwar unter Beachtung folgender Bedingungen. Die Permeabilitäten müssen von den kürzesten bis zu den längsten Wellen für sehr schwache Felder ($\lim H = 0$) bestimmt werden, d. h. es ist die sogenannte Anfangspermeabilität zu beobachten, weil dadurch die Feldabhängigkeit sowie die Hysteresis völlig eliminiert und Verhältnisse geschaffen werden, die der theoretischen Verwendung am leichtesten zugänglich sind. Ferner sollen zur Erregung der Wellen möglichst ungedämpfte Sinusschwingungen benutzt werden, um den großen Einfluß des Dekrements auf die magnetischen Eigenschaften auszuschalten. Schließlich soll theoretisch exakt festgestellt werden, welche Größe denn eigentlich gemessen wird, und es sollen aus den Resultaten möglichst alle Folgerungen bezüglich der molekularen Konstitution der Ferromagnetica gezogen werden.

§ 1. Die Magnetonen unter der Einwirkung einer periodischen Kraft.

Um einen Anhaltspunkt für die zu erwartenden Erscheinungen zu haben, wollen wir zunächst das Verhalten der Elementarmagnete in einem Wechselfelde studieren.¹⁾ Wir idealisieren den Fall ein wenig, indem wir von der thermischen Agitation absehen, also annehmen, daß, wenn keine äußere magnetische Kraft wirkt, jedes Magneton sich in die Richtung seines Molekularfeldes A einstellt.

1) Vgl. W. Arkadiew, Physik. Zeitschr. 14. S. 928. 1913.

Dieses Molekularfeld A , welches, wie wir früher gezeigt haben¹⁾, durch die magnetische Wirkung der Nachbarmagnetonen erklärt werden kann, hat eine ganz bestimmte Verteilungsfunktion.²⁾ Jede Richtung im Raume ist für dasselbe gleich wahrscheinlich, und für den Betrag des Vektors wollen wir annehmen, daß er konstante GröÙe hat. Das ist zwar nicht ganz richtig, gilt aber näherungsweise und kommt darauf hinaus, daß wir anstatt eines praktisch nicht sehr breiten kontinuierlichen Spektrums von Eigenschwingungen eine einzige scharfe Linie als Eigenschwingung substituieren.

Der Vektor A schlieÙe mit der Vorzugsrichtung, d. h. der Richtung, in welcher wir uns die erregende Kraft K wirkend denken, den Winkel α ein.

Wir brauchen nun nur die Bewegung in der durch A und K bestimmten Ebene zu berücksichtigen, weil die zu dieser Ebene senkrechte Komponente infolge der Reibung allmählich erlöschen muß.

Sei nun das Magneton um den Winkel ϑ aus der Gleichgewichtslage abgelenkt, so daß es also den Winkel $\alpha + \vartheta$ mit der Vorzugsrichtung bildet, so ist das Drehmoment, welches auf dasselbe wirkt, und welches den Winkel ϑ zu vergrößern trachtet, $-AM \sin \vartheta - KM \sin (\alpha + \vartheta)$, wenn M das magnetische Moment des Elementarmagneten bedeutet.

Da wir die äußere Kraft und somit auch den durch sie hervorgerufenen Ablenkungswinkel ϑ als unendlich klein betrachten wollen, so gilt für das Drehmoment genähert $-AM\vartheta - KM \sin \alpha$, und die Bewegungsgleichung für das Magneton lautet

$$(1) \quad J \ddot{\vartheta} + k \dot{\vartheta} + 4\pi^2 \gamma_0^2 J \vartheta = -MK \sin \alpha.$$

Hier ist J das Trägheitsmoment des Elementarmagneten bezüglich einer Achse senkrecht zur magnetischen Achse, k der Reibungsfaktor, n_0 die Eigenschwingungszahl des ungedämpften Systems, also

$$(2) \quad AM = 4\pi^2 n_0^2 J.$$

1) R. Gans, Gött. Nachr. S. 197. 1910; sowie Ann. d. Phys. 50. S. 149. 1916.

2) R. Gans, Ann. d. Phys. 63. S. 382. 1920.

Ist die erregende Kraft K periodisch, so können wir setzen

$$(3) \quad -M K \sin \alpha = C e^{2\pi i n t},$$

und es ergibt sich für die erzwungene Schwingung

$$(4) \quad \vartheta = - \frac{M K \sin \alpha}{4\pi^2 J \left[n_0^2 - n^2 + \frac{k n}{2\pi J} i \right]}.$$

Die Magnetisierung, d. h. die geometrische Summe der magnetischen Momente aller in der Volumeinheit befindlichen Magnetonen, welche um den Winkel ϑ aus der Gleichgewichtslage abgelenkt sind, also den Winkel $\alpha + \vartheta$ mit der Vorzugsrichtung bilden, ist demnach

$$(5) \quad \mathfrak{M} = \sum M \cos (\alpha + \vartheta)$$

oder genähert, da $\sum M \cos \alpha = 0$ ist,

$$(6) \quad \mathfrak{M} = -M \sum \vartheta \sin \alpha,$$

somit nach Gleichung (4)

$$(7) \quad \mathfrak{M} = \sum \frac{M^2 \sin^2 \alpha K}{4\pi^2 J \left[n_0^2 - n^2 + \frac{k n}{2\pi J} i \right]}.$$

Nun ist die Wahrscheinlichkeit, daß das Molekularfeld A zwischen den Winkeln α und $\alpha + d\alpha$ liegt, $\frac{1}{2} \sin \alpha \cdot d\alpha$, demnach die sich auf die Volumeinheit erstreckende Summe

$$\sum \sin^2 \alpha = \frac{N}{2} \int_0^\pi \sin^2 \alpha \cdot \sin \alpha d\alpha = \frac{2}{3} N,$$

wo N die Anzahl Magnetonen in der Volumeinheit bedeutet. Wir erhalten also

$$(8) \quad \mathfrak{M} = \frac{N M^2 K}{6\pi^2 J \left[n_0^2 - n^2 + \frac{k n}{2\pi J} i \right]}$$

oder

$$(9) \quad K = \frac{6\pi^2 J \left[n_0^2 - n^2 + \frac{k n}{2\pi J} i \right]}{N M^2} \mathfrak{M}.$$

Nach der Weißschen Hypothese besteht nun zwischen der erregenden Kraft K , der Feldstärke H und der Magnetisierung \mathfrak{M} die Beziehung

$$(10) \quad K = H + g \mathfrak{M}.$$

so daß

$$(11) \quad H = \left\{ \frac{6\pi^2 J \left[n_0^2 - n^2 + \frac{k n}{2\pi J} i \right]}{N M^2} - g \right\} \mathfrak{M}$$

oder

$$(12) \quad \frac{\mathfrak{M}}{H} = \bar{\kappa} = \frac{\frac{N M^2}{6\pi^2 J}}{n_0^2 - n^2 - \frac{g N M^2}{6\pi^2 J} + \frac{k n}{2\pi J} i}$$

wird.

Wir setzen

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} n_0^2 - \frac{g N M^2}{6\pi^2 J} = n_0'^2, \\ \frac{N M^2}{6\pi^2 J n_0'^2} = \kappa_0, \\ \frac{k}{2\pi J n_0'} = \varepsilon \end{array} \right.$$

und nennen n_0' die scheinbare Eigenschwingungszahl, κ_0 die Anfangssuszeptibilität, ε die Dämpfungskonstante. Dann wird nach Gleichung (12)

$$(14) \quad 4\pi \bar{\kappa} = \frac{4\pi \kappa_0}{1 - \left(\frac{n}{n_0'} \right)^2 + \varepsilon \frac{n}{n_0'} i}.$$

Die Suszeptibilität ist also eine komplexe Größe, wir dürfen somit setzen

$$(15) \quad 4\pi \bar{\kappa} = a - b i.$$

Dann gilt nach der einen Maxwellschen Gleichung

$$-\text{rot } E = (1 + 4\pi \bar{\kappa}) \frac{\partial H}{\partial t} = (1 + a) \frac{\partial H}{\partial t} - b i \frac{\partial H}{\partial t},$$

oder, da $\frac{\partial H}{\partial t} = 2\pi n i H$ ist,

$$(16) \quad -\text{rot } E = (1 + a) \frac{\partial H}{\partial t} + 2\pi n b H.$$

Setzen wir schließlich

$$(17) \quad a = 4\pi \kappa = \mu - 1; \quad 2\pi n b = 4\pi \varrho,$$

so folgt

$$(18) \quad -\text{rot } E = \mu \frac{\partial H}{\partial t} + 4\pi \varrho H.$$

Infolge der Dämpfung der Magnetonenschwingungen ist also die magnetische Induktion nicht mehr der Feldstärke proportional, sondern es tritt eine Phasenverschiebung auf infolge des Faktors q , den wir wegen der Analogie mit der entsprechenden elektrischen Größe die magnetische Leitfähigkeit nennen wollen.

Durch Trennung des reellen und imaginären Teils ergibt sich nach Gleichungen (14), (15) und (17)

$$(19) \quad \left\{ \begin{array}{l} \kappa = \kappa_0 \frac{1 - \left(\frac{n}{n_0'}\right)^2}{\left[1 - \left(\frac{n}{n_0'}\right)^2\right]^2 + \varepsilon^2 \left(\frac{n}{n_0'}\right)^2}; \\ q = 2\pi\kappa_0 n_0' \varepsilon \frac{\left(\frac{n}{n_0'}\right)^2}{\left[1 - \left(\frac{n}{n_0'}\right)^2\right]^2 + \varepsilon^2 \left(\frac{n}{n_0'}\right)^2}. \end{array} \right.$$

Diese Gleichungen geben also die Abhängigkeit der Suszeptibilität κ und der magnetischen Leitfähigkeit q von der Schwingungszahl n .

Die Funktionen

$$y = \frac{\kappa}{\kappa_0}; \quad \text{sowie} \quad z = \frac{q}{2\pi\kappa_0 n_0'}$$

hängen also nicht nur von der Variablen

$$x = \frac{n}{n_0'},$$

sondern auch von dem Parameter ε ab. Umgekehrt müssen also ε , n_0' und κ_0 bestimmbar sein, wenn man etwa κ für verschiedene Schwingungszahlen beobachtet. Wir wollen deshalb die Funktionen

$$(20) \quad y = \frac{1 - x^2}{(1 - x^2)^2 + \varepsilon^2 x^2}; \quad z = \frac{\varepsilon x^2}{(1 - x^2)^2 + \varepsilon^2 x^2}$$

diskutieren.

$$\begin{array}{ll} \text{Für} & x = 0 \quad \text{ist} \quad y = 1, \\ & x = 1 \quad \quad y = 0, \\ & x = \infty \quad y = 0. \end{array}$$

$$\text{Ferner ist} \quad \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\text{für} \quad x_1^2 = 1 - \varepsilon; \quad y_1 = \frac{1}{\varepsilon(2 - \varepsilon)} \quad (\text{Maximum}),$$

$$x_2^2 = 1 + \varepsilon; \quad y_2 = -\frac{1}{\varepsilon(2 + \varepsilon)} \quad (\text{Minimum}).$$

Das Maximum existiert natürlich nur für $\varepsilon < 1$.

Für kleine Werte von x (sehr langsame Schwingungen) gilt $y = 1 + (1 - \varepsilon^2) x^2$, d. h. die Suszeptibilität nimmt anfänglich mit der Schwingungszahl zu oder ab, je nachdem ε kleiner oder größer als Eins ist.

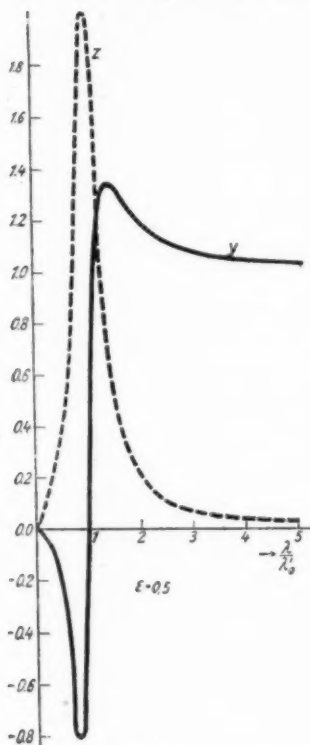


Fig. 2.

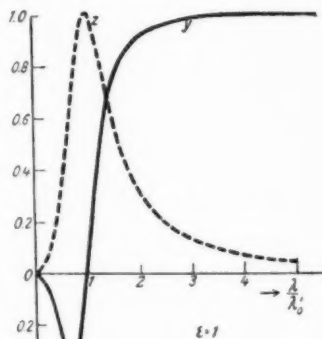


Fig. 3.

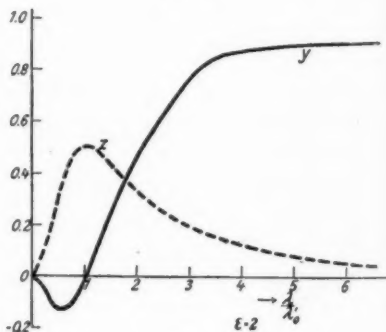


Fig. 4.

In den Figg. 2—4 haben wir y und z zur Veranschaulichung für die drei speziellen Werte $\varepsilon = 0,5$; $\varepsilon = 1$; $\varepsilon = 2$ gezeichnet, dabei aber als Abszisse

$$\frac{1}{x} = \frac{\lambda}{\lambda'}$$

gewählt, wo λ die Wellenlänge, λ_0' die scheinbare Eigenwellenlänge bedeutet.

Aus diesen Kurven folgt, daß die Permeabilität bei kleiner Dämpfung im allgemeinen mit der Schwingungszahl bis zu einem Maximum wächst außer in der Region der anomalen Dispersion, die sich von

$$\frac{n}{n_0'} = \sqrt{1 - \varepsilon} \quad \text{bis} \quad \frac{n}{n_0'} = \sqrt{1 + \varepsilon}$$

erstreckt. Für $n < n_0'$ ist das Material paramagnetisch, für $n > n_0'$ diamagnetisch und für sehr große Schwingungszahlen magnetisch indifferent.

Die magnetische Leitfähigkeit ist wesentlich positiv.

$$\begin{aligned} \text{Für} \quad x = 0 & \text{ ist } z = 0, \\ x = 1 & \text{ „ } z = 1/\varepsilon, \\ x = \infty & \text{ „ } z = 0. \end{aligned}$$

Ferner ist

$$\frac{dx}{dz} = 0 \quad \text{für} \quad x = 1,$$

d. h. die magnetische Leitfähigkeit hat ihr Maximum für $n = n_0'$.

§ 2. Die Permeabilität für den stationären Fall.

Um die Permeabilität des Nickels für den stationären Fall zu messen, benutzten wir die folgende Anordnung (Fig. 5).

Die enge Magnetisierungsspule S_1 von 35 cm Länge hatte $n_1 = 9,40$ Windungen pro Zentimeter; sie war mittels des Stromwenders C_1 mit drei Akkumulatoren der Spannung $E = 6,10$ Volt und dem Widerstande R_1 in Serie geschaltet.

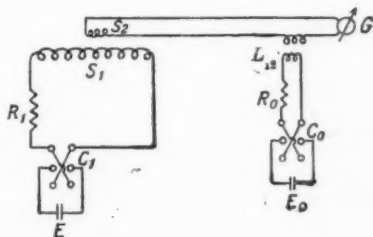


Fig. 5.

In der Spule S_1 befand sich ein Bündel, das aus 22 Nickeldrähten vom mittleren Durchmesser 0,535 mm und der Länge 35 cm bestand. Dieses Bündel war von der Spule S_2 umgeben, die $N_2 = 392$ Windungen hatte und mit dem ballistischen Galvanometer G verbunden war.

Zur Eichung desselben diente die wechselseitige Induktion L_{12} , deren Sekundärspule sich im Galvanometerkreis

befand, während die Primärspule mit einer bekannten elektromotorischen Kraft E_0 , einem bekannten Widerstande R_0 und dem Kommutator C_0 den Eichkreis bildete.

Kommutiert man den Magnetisierungsstrom i_1 , so erhält man einen ballistischen Ausschlag a , der sich nach der Formel

$$(21) \quad 2 B N_2 q = 2 \mu \cdot 4 \pi n_1 i_1 N_2 q = D a$$

berechnet. B ist hierbei die Induktion im Bündel des Gesamtquerschnitts q . D hängt von der ballistischen Empfindlichkeit des Galvanometers ab und bestimmt sich durch

$$(22) \quad 2 L_{12} i_0 = D a_0,$$

wo a_0 den Ausschlag bedeutet, der durch Kommutieren des Eichstromes i_0 entsteht.

Als Korrektur war noch die endliche Dicke der Spule S_2 zu berücksichtigen, welche bewirkt, daß nicht alle Kraftlinien durch das Ferromagnetikum gingen, sondern einige neben dem Drahtbündel direkt durch die Spule S_2 .

Auf sorgfältige Entmagnetisierung und Benutzung sehr kleiner Ströme i_1 wurde besonders geachtet, damit die Messung auch wirklich die Anfangspermeabilität ergab. Auf diese Weise erhielten wir $\mu_0 = 11,8$.

§ 3. Die Meßmethode für langsame Schwingungen.

Die Methode der Permeabilitätsbestimmung für elektrisch-magnetische Schwingungen war die der Messung des logarithmischen Dekrements δ eines elektrischen Schwingungskreises, dessen Leitungsdraht aus ferromagnetischem Material gebildet war. δ steht bekanntlich mit dem elektrischen Widerstande w und der Selbstinduktion L des Kreises in der Beziehung

$$\delta = \frac{w}{2 n L},$$

so daß, wenn man δ mittels der Bjerknesschen Resonanzmethode ermittelt und L aus den Dimensionen berechnet, der Widerstand w abgeleitet werden kann, der seinerseits für Schwingungen von der Permeabilität abhängig ist.

Die Versuchsanordnung war, je nachdem es sich um langsamere oder schnellere Schwingungen handelte, etwas ver-

schieden. Gehen wir zunächst auf die Versuchsanordnung für erstere ein.¹⁾

Die Löschfunkenstrecke F der Gesellschaft für drahtlose Telegraphie (Fig. 6) des elektrischen Schwingungskreises I wurde mittels des Induktors J gespeist, der mit einem A.E.G.-Turbinenunterbrecher betrieben wurde. Dieser Kreis, dessen Kondensator C_1 ein variabler Glimmerkondensator der Firma Huth war, induzierte auf den zweiten rechteckigen Schwingungskreis II, dieser wieder auf den dritten III. C_2 und C_3 sind geeichte variable Luftkondensatoren der Firma Huth.

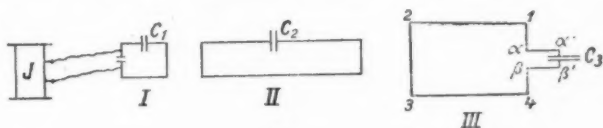


Fig. 6.

Der Schwingungskreis III war sorgfältig rechteckig konstruiert, so daß die Selbstinduktion L des Kreises $\alpha, 1, 2, 3, 4, \beta$ aus Kupferdraht nach der Formel

$$(23) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{L_a}{4} = l \ln \frac{2lb}{a(l + \sqrt{l^2 + b^2})} + b \ln \frac{2lb}{a(b + \sqrt{l^2 + b^2})} \\ - 2(l + b - \sqrt{l^2 + b^2}) \end{aligned} \right.$$

berechnet werden kann, unter l und b die Seitenlängen des Rechtecks, unter a den Drahtradius verstanden. Es ist jedoch zu bemerken, daß das nach Gleichung (23) berechnete L_a nur die sogenannte äußere Selbstinduktion ergibt. Zu ihr ist die von der Schwingungszahl abhängige innere Selbstinduktion L_i zu addieren. In welcher Weise diese ermittelt wurde, werden wir später sehen.

α und β waren die eigentlichen Klemmen der Kapazität, es war also noch eine schädliche Selbstinduktion $\alpha', \alpha, \beta, \beta'$ der Kondensatorzuleitungen vom Werte P vorhanden.

Diese wurde empirisch ermittelt, indem das Rechteck $\alpha, 1, 2, 3, 4, \beta$ durch ein anderes derselben Breite, aber veränderter Länge mit der äußeren Selbstinduktion L_a' ersetzt wurde. Man beobachtete die Resonanz des Kreises III auf

1) Vgl. Max Wien, Ann. d. Phys. 25. S. 625. 1908.

II mit jedem dieser beiden Rechtecke, und zwar mittels eines schwach gekoppelten Meßkreises IV, der ein Brandessches Vakuumthermoelement und ein Hagen-Rubenssches Panzergalvanometer enthielt.

Tritt die Resonanz bei den Kapazitäten C_3 bzw. C_3' ein, so gilt

$$(24) \quad (L_a + L_i + P) C_3 = (L_a' + L_i' + P) C_3',$$

woraus sich

$$(25) \quad P = \frac{(L_a + L_i) C_3 - (L_a' + L_i') C_3'}{C_3' - C_3}$$

berechnen läßt.

Ganz genau ist allerdings diese Formel nicht, denn die Selbstinduktion zweier in Serie geschalteter Selbstinduktionen L und P ist $L + P + 2M$, wo M der wechselseitige Induktionskoeffizient der beiden Selbstinduktionen bedeutet. Dieser aber ändert sich streng genommen auch, wenn man die Dimensionen des Rechtecks variiert. Da aber nur die Länge desselben verändert wurde, die Breite aber konstant blieb, somit die benachbarten Teile der Rechtecke $\alpha, 1, 2, 3, 4, \beta$ und $\alpha', \alpha, \beta, \beta'$ unverändert blieben, so kann die Änderung von M nichts ausgemacht haben, zumal es sich bei der Bestimmung von P nur um eine Korrekektionsgröße handelte. Was man durch Formel (25) bestimmt, ist somit nicht P , sondern $P + 2M$, doch das interessiert uns auch gerade, denn durch Addition zu L erhält man $L + P + 2M$, d. i. die Gesamtselbstinduktion.

In Formel (25) kommen die inneren Selbstinduktionen L_i und L_i' vor, die von der Stromverteilung im Draht, also von der Schwingungszahl abhängen, somit unbekannt sind. Bei unserer Anordnung sind dieselben aber im Vergleich zu L_a und L_a' so klein, daß man sie in erster Näherung vernachlässigen kann.

Berechnet man auf diese Weise P aus Gleichung (25) und ermittelt die Schwingungszahl n aus der Thomsonschen Formel

$$(26) \quad 2\pi n = \frac{1}{\sqrt{C_3(L_a + L_i + P)}}$$

wiederum in erster Näherung unter Vernachlässigung von L_i , so hat man dann die Möglichkeit, nach der Stefan-Rayleighschen Beziehung (vgl. weiter unten) L_i zu berechnen

und dann mittels Gleichungen (25) und (26) genaue Werte für P und n zu erzielen.

Ersetzt man, wie es bei unserem Meßverfahren notwendig ist, das Kupferdrahtrechteck $\alpha, 1, 2, 3, 4, \beta$ durch eins aus Nickeldraht, so wurde die innere Selbstinduktion für dieses, das von der Permeabilität abhängt, nicht etwa, wie oben, errechnet, sondern die Gesamtselbstinduktion durch Resonanz der Kreise II und III experimentell bestimmt.

Das Meßverfahren war nun das folgende. Man stimmte die ziemlich eng gekoppelten Kreise I und II aufeinander ab und nahm die Resonanzkurve auf, welche dem lose mit dem Kreise III gekoppelten Kreise II entsprach. Diese Resonanzkurve beobachtete man einerseits mit einem Rechteck $\alpha, 1, 2, 3, 4, \beta$ aus Kupfer, andererseits aus Nickel bei derselben Periode der Wellen. Die beiden Rechtecke aus Kupfer und Nickel hatten die gleichen Abmessungen, und ihre Koppelungen mit dem Kreise II waren in beiden Fällen zum Überfluß die gleichen.

Die mit dem Kupferrechteck III ermittelte Resonanzkurve ergibt die Summe des Dekrements des Kreises II, d. h. der erregenden Wellen, und des durch Joulesche Wärme im Kupfer des Kreises III hervorgerufenen Dekrements; die mit dem ferromagnetischen Rechteck in III aufgenommene Kurve dagegen die Summe des Dekrements des Kreises II und des durch den Widerstand des ferromagnetischen Drahtes erzeugten Dekrements. Die Differenz der beiden so beobachteten Dekremente ist also von der Dämpfung des Kreises II unabhängig und gibt direkt die Differenz der Dekremente, die dem Widerstande des Ferromagnetikums und des Kupfers entsprechen.

Das Dekrement, welches dem Kupferwiderstande entspricht, ist eine kleine, wie wir sehen werden, leicht berechenbare Korrektionsgröße, so daß wir in der Lage sind, einerseits die durch den ferromagnetischen Draht allein erzeugte Dämpfung zu berechnen, andererseits aber auch die Dämpfung der erregenden Wellen (im Kreise II), welche auf III wirken.

§ 4. Theorie der Methode für langsame Schwingungen.

Es handelt sich darum, Widerstand und innere Selbstinduktion eines Drahtes von kreisförmigem Querschnitt für

elektrische Schwingungen zu berechnen, ein längst gelöstes Problem, das auf die Stefan-Rayleighschen Formeln führt. Jedoch hat man bisher stets angenommen, daß keine magnetische Leitfähigkeit existiert, auf deren Vorhandensein wir durch die Molekulartheorie hingewiesen worden sind.

Wir wollen deshalb die Rechnung unter der allgemeineren Voraussetzung, daß sowohl die Suszeptibilität wie auch die magnetische Leitfähigkeit von Null verschieden sind, neu durchführen, jedoch annehmen, daß die erregenden Wellen ungedämpft sind. Durch eine besondere Betrachtung im § 6 werden wir erkennen, daß diese Voraussetzung wegen der Kleinheit der Dämpfung der erregenden Wellen vollauf gerechtfertigt ist.

Die Maxwell'schen Gleichungen nehmen unter unseren Voraussetzungen die Form an

$$(27) \quad \text{rot } H = \varepsilon \frac{\partial E}{\partial t} + 4\pi \sigma E,$$

$$(28) \quad -\text{rot } E = \mu \frac{\partial H}{\partial t} + 4\pi \rho H.$$

Vernachlässigen wir im Leiter den Verschiebungsstrom gegenüber dem Leitungsstrom, was im Gebiete Hertz'scher Wellen erlaubt ist, und nehmen ferner an, daß die Schwingungen rein periodisch mit der Frequenz $\omega = 2\pi n$ sind, so erhalten wir

$$(29) \quad \text{rot } H = 4\pi \sigma E,$$

$$(30) \quad -\text{rot } E = (\mu \omega i + 4\pi \rho) H = \mu' \omega i H.$$

Durch Einführung von

$$(31) \quad \mu' = \mu \left(1 - \frac{4\pi \rho}{\mu \omega} i \right) = \mu (1 - \gamma i),$$

wo

$$(32) \quad \gamma = \frac{4\pi \rho}{\mu \omega} = \frac{2\rho}{\mu n}$$

ist, haben wir also formal unseren Fall auf den nicht existierenden magnetischen Leitfähigkeit zurückgeführt.

Wir können uns also im weiteren an die Ableitungen anderer Autoren halten.

Ist die Wellenlänge so groß, daß der elektromagnetische Zustand als quasistationär aufgefaßt werden kann, und die Krümmung des Drahtes so klein, daß wir ihn als geradlinig

ansehen können, so hat der elektrische Vektor E , welcher der Drahtachse parallel ist, den Wert¹⁾

$$(33) \quad E = A J_0(kr) e^{i\omega t},$$

wo A eine Konstante, J_0 die Besselsche Funktion nullter Ordnung und erster Art, r den Abstand von der Drahtachse bedeutet und

$$(34) \quad k^2 = -4\pi\sigma\mu'\omega i$$

ist.

Um Widerstand und Selbstinduktion zu definieren, konstruieren wir mit Cohn (a. a. O. S. 362) eine Fläche S , welche den Außenraum des Drahtkreises zu einem einfach zusammenhängenden macht, deren Randkurve der Länge l also auf der Drahtoberfläche verläuft. Den Induktionsfluß Q durch diese Fläche zerlegen wir in zwei Bestandteile Q' und Q'' , welche von dem Strome j und dem „fremden“ Felde mit der elektromotorischen Kraft E_f herrührt.

Dann gilt nach der zweiten Maxwellschen Gleichung, wenn a den Radius des kreisförmigen Drahtquerschnitts bezeichnet,

$$(35) \quad -\frac{\partial Q}{\partial t} = l E(a),$$

$$(36) \quad -\frac{\partial Q''}{\partial t} = E_f.$$

Ferner setzen wir

$$(37) \quad Q' = j L_a.$$

Dann ist bei einem merklich geradlinigen Drahte von kreisförmigem Querschnitt L_a von der Stromverteilung über den Drahtquerschnitt und von der Schwingungszahl unabhängig, denn $\frac{L_a}{2} j^2$ bedeutet die magnetische Energie des Außenraums.

Subtrahieren wir Gleichung (35) von (36), berücksichtigen, daß $Q = Q' + Q''$ ist, und benutzen Gleichung (37), so erhalten wir

$$(38) \quad E_f = l E(a) + L_a \frac{\partial j}{\partial t}.$$

Sind E_f und j einfach harmonische Funktionen der Zeit von der Frequenz ω , so gibt es stets reelle, von der Zeit unab-

1) Vgl. z. B. E. Cohn, Das elektromagnetische Feld. Leipzig 1900. S. 357.

hängige, doch im allgemeinen von der Frequenz abhängige Größen w und L , welche die Gleichung

$$(39) \quad E_f = w j + L \frac{\partial j}{\partial t}$$

befriedigen. Diese nennen wir Widerstand und Selbstinduktion.

Nach Gleichungen (38) und (39) gilt

$$(40) \quad w j + (L - L_a) \frac{\partial j}{\partial t} = l E(a).$$

Bevor wir diese beiden Größen tatsächlich berechnen, wollen wir die physikalische Bedeutung von w ermitteln.

Hierzu dient uns der Poyntingsche Satz

$$(41) \quad \left\{ \begin{aligned} - \int \Sigma_n dS &= \int \sigma E^2 d\tau + \int \varrho H^2 d\tau \\ &+ \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \int \frac{\mu H^2}{8\pi} d\tau + \int \frac{\epsilon E^2}{8\pi} d\tau \right\}, \end{aligned} \right.$$

der aus Gleichungen (27) und (28) folgt.

Wenden wir diese Gleichung auf den Innenraum des Drahtes an, so ist S die Drahtoberfläche und

$$(42) \quad - \int \Sigma_n dS = \frac{1}{4\pi} E \cdot H \cdot 2\pi a l.$$

Nun ist aber nach Gleichung (29)

$$(43) \quad H \cdot 2\pi a = 4\pi j,$$

also

$$(44) \quad - \int \Sigma_n dS = E(a) j \cdot l,$$

somit wegen Gleichungen (40) und (41)

$$(45) \quad \left\{ \begin{aligned} w j^2 + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{L - L_a}{2} j^2 \right) &= \int \sigma E^2 d\tau + \int \varrho H^2 d\tau \\ &+ \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \int \frac{\mu H^2}{8\pi} d\tau + \int \frac{\epsilon E^2}{8\pi} d\tau \right\}. \end{aligned} \right.$$

Bilden wir die zeitlichen Mittelwerte der Terme dieser Gleichung und bezeichnen dieselben durch eckige Klammern, so ergibt sich schließlich

$$(46) \quad w [j^2] = \left[\int \sigma E^2 d\tau \right] + \left[\int \varrho H^2 d\tau \right].$$

Das Produkt aus dem Widerstand und dem Quadrat der effektiven Stromstärke ist gleich der Summe der Jouleschen Wärme (Reibung der Leitungselektronen) und der Magnetisierungswärme (Reibung der Magnetonen).

Diese Magnetisierungswärme existiert, trotzdem von Hysteris nicht die Rede ist. (Sie ist das Produkt der Reibung bei den Schwingungen der Magnetonen um stabile Gleichgewichtslagen, während die Hysteriswärme durch die Reibung beim Umlappen der Magnetonen aus einer labilen in eine stabile Gleichgewichtslage erzeugt wird.)

Nachdem wir so die Bedeutung von w erkannt haben, wollen wir w und L wirklich berechnen.

Nach Gleichung (40) ergibt sich, wenn wir die sogenannte innere Selbstinduktion $L_i = L - L_a$ einführen,

$$(47) \quad w + i \omega L_i = \frac{l E(a)}{j}.$$

Nun ist aber nach Gleichung (43)

$$(48) \quad 4 \pi j = 2 \pi a H(a) = \frac{2 \pi a}{i \omega} \frac{\partial H(a)}{\partial t}.$$

Da nun nach der zweiten Maxwellschen Gleichung

$$(49) \quad \frac{\partial E}{\partial r} = \mu' \frac{\partial H}{\partial t}$$

ist, so folgt

$$(50) \quad 4 \pi j = \frac{2 \pi a}{i \omega \mu'} \left(\frac{\partial E}{\partial r} \right)_a$$

und wegen Gleichung (47)

$$(51) \quad w + i \omega (L - L_a) = 2 l \omega \mu' i \left[\frac{E}{r \frac{\partial E}{\partial r}} \right]_{r=a}.$$

Dividieren wir durch den Widerstand des Drahtes für stationäre Ströme w_0 und führen den Widerstand pro Längeneinheit

$$w_1 = \frac{w_0}{l} = \frac{1}{\pi \sigma a^2}$$

ein, so erhalten wir mit Berücksichtigung von Gleichung (33) und der bekannten Beziehung $J_0'(x) = -J_1(x)$

$$(52) \quad \frac{w + i \omega L_i}{w_0} = \left[\frac{x}{2} \frac{J_0(x)}{J_1(x)} \right]_{x=ka}.$$

Nun hat für alle unsere Beobachtungen ka einen ziemlich großen Wert, also stellen wir die Besselschen Funktionen

durch ihre halbkonvergenten Entwicklungen dar. Da nach Gleichung (34)

$$(59) \quad i k a = 2 \alpha (\Gamma + i \Gamma'),$$

wo zur Abkürzung

$$(54) \quad \alpha = \sqrt{\frac{\pi \mu n}{w_1}}; \quad \Gamma = \sqrt{\sqrt{1+\gamma^2} + \gamma}; \quad \Gamma' = \sqrt{\sqrt{1+\gamma^2} - \gamma}$$

gesetzt ist, und $i k a$ einen positiv reellen Bestandteil hat, gilt

$$(55) \quad \begin{cases} J_0(x) \sqrt{2\pi x} = S_0(-2ix) e^{i(x - \frac{\pi}{4})} \\ J_1(x) \sqrt{2\pi x} = S_1(-2ix) e^{i(x - \frac{\pi}{4})} \end{cases}$$

Da ferner

$$(56) \quad \frac{S_0(x)}{S_1(x)} = 1 - \frac{1}{x} + \frac{3}{2x^2} - \dots$$

ist, erhalten wir

$$(57) \quad \begin{cases} \frac{w + i \omega L_i}{w_0} = \frac{k a i}{2} + \frac{1}{4} + \frac{3}{16 k a i} + \dots \\ \quad = \alpha (\Gamma + i \Gamma') + \frac{1}{4} + \frac{3(\Gamma - i \Gamma')}{64 \alpha \sqrt{1+\gamma^2}} + \dots \end{cases}$$

Die Zerlegung in reellen und imaginären Teil ergibt

$$(58) \quad \begin{cases} \frac{w}{w_0} = \alpha \Gamma + \frac{1}{4} + \frac{3 \Gamma}{64 \alpha \sqrt{1+\gamma^2}} + \dots \\ \frac{L_i \omega}{w_0} = \alpha \Gamma' - \frac{3 \Gamma'}{64 \alpha \sqrt{1+\gamma^2}} + \dots \end{cases}$$

Das sind die Verallgemeinerungen der bekannten Stefan-Lord Rayleighschen Formeln für den Fall, daß $\gamma \neq 0$ ist.

Schließlich haben wir noch zu sehen, wie μ sich aus dem logarithmischen Dekrement ableitet, denn dieses ist mittels Aufnahme von Resonanzkurven der Messung direkt zugänglich.

In einem aus Kapazität, Selbstinduktion und Widerstand bestehenden Schwingungskreise ist bekanntlich das logarithmische Dekrement

$$(59) \quad \delta = \frac{w \pi}{L \omega} = \frac{w}{2 n L} = \frac{w}{2 n (L_s + L_i)}$$

Ist nun n sehr groß, so wird nach Gleichung (54) und (58)

$$\frac{w}{w_0} = \alpha \Gamma, \quad L_i = 0.$$

Somit folgt in diesem Grenzfalle

$$(60) \quad \delta = \frac{w_1 l \alpha \Gamma}{2 n L_a} = \frac{l \Gamma}{2 L_a} \sqrt{\frac{\pi \mu w_1}{n}}.$$

Hieraus ergibt sich

$$(61) \quad \mu^* = \mu \Gamma^2 = \mu \left[\sqrt{1 + \gamma^2} + \gamma \right] = \left(\frac{2 L_a \delta}{l} \right)^2 \frac{n}{\pi w_1}.$$

Diese Kombination $\mu^* = \mu [\sqrt{1 + \gamma^2} + \gamma]$ von μ und γ ist es, die nach unserer Beobachtungsmethode der Messung direkt zugänglich ist. Wir wollen μ^* die *scheinbare Permeabilität* des Materials nennen, scheinbar insofern, als es die Permeabilität wäre, wenn keine magnetische Leitfähigkeit existierte.

Ein Ferromagnetikum hat eben für jede Wellenlänge zwei charakteristische magnetische Konstanten, genau so wie in der Optik auch für jede Wellenlänge zwei Konstanten, Brechungsexponent und Absorptionskoeffizient, das Material definieren.

Es versteht sich, daß Gleichung (60) nur für äußerst schnelle Schwingungen gilt. Sonst müssen wir die aus Gleichung (59) folgende genauere Formel

$$(62) \quad \delta = \frac{w_1 l \alpha \Gamma}{2 n L_a} \cdot \frac{1 + \frac{1}{4 \alpha \Gamma} + \frac{3}{64 \alpha^2 \sqrt{1 + \gamma^2}}}{1 + \frac{w_1 l \alpha \Gamma'}{2 n \pi L_a} \left(1 - \frac{3}{64 \alpha^2 \sqrt{1 + \gamma^2}} \right)}$$

heranziehen.

Diese Gleichung ist wesentlich komplizierter, weil der Korrektionsfaktor sowohl μ wie γ enthält, die beide unbekannt sind. Deshalb ist es ratsamer, zunächst nach Gleichung (60) bzw. (61) zu rechnen und dann nachträglich, wenn nötig, die gefundenen Werte gemäß Gleichung (62) zu korrigieren.

§ 5. Die Meßmethode für schnelle Schwingungen.

Für kurze Wellen bedienten wir uns der folgenden Versuchsanordnung. Wir erzeugten stehende elektrische Wellen in zwei parallelen ferromagnetischen Drähten AB und $A'B'$ von ungefähr 0,5 mm Durchmesser, deren gegenseitiger Abstand 21 mm betrug. Dieselben waren durch zwei Kupfer-

brücken miteinander verbunden, von denen die eine AA' fest, die andere BB' mikrometrisch verschiebbar war (Fig. 7). Bei der Anordnung war sorgfältig die Nähe von Metallen vermieden.

Als Oszillatoren O dienten solche, wie sie zuerst von Mie¹⁾ und später von seinem Schüler Rukop²⁾ verwendet worden waren. Da diese Erreger eingehend beschrieben worden sind, ist es unnötig, näher auf dieselben einzugehen.

Der lose mit dem Paralleldrahtkreis gekoppelte Oszillator wurde mit einem mittleren Induktorium J und Turbinenunterbrecher betrieben und funktionierte mit großer Regelmäßigkeit, wie sich aus den Ausschlägen des Galvanometers G ,

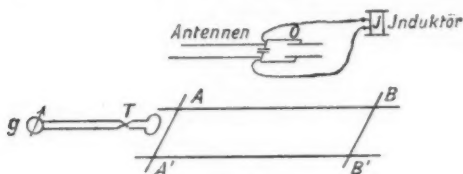


Fig. 7.

das mit dem Brandesschen Vakuumthermokreuz T magnetisch an den Paralleldrahtkreis gekoppelt war, ersehen ließ.

Eine kleine Schwierigkeit bereitete die erstmalige Abstimmung der Antennen des Oszillators auf seinen eigenen Schwingungskreis, doch das liegt in der Natur der Sache, da die Dämpfung dieser Erreger so gering ist, daß die Resonanz sich auf einen äußerst geringen Bereich erstreckt. Des weiteren hatten wir mit der schlechten Qualität des Leuchtgases zu kämpfen, durch welche die Stoßerregung stark beeinträchtigt wurde. Erst als wir das Gas von der in ihm befindlichen Kohlen säure und anderen bei der Destillation von Quebrachoholz mit entwickelten Säuren durch ein KOH-Vorgelege und vom Wasser durch ein CaCl_2 -Rohr befreit hatten, funktionierte der Erreger gut.

Für jede Wellenlänge mußte natürlich ein besonderer Erreger konstruiert werden.

1) G. Mie, Physik. Zeitschr. 11. S. 1035. 1910.

2) H. Rukop, Ann. d. Phys. 42. S. 492. 1913.

Es wurde stets die Resonanz beobachtet, die einem Brückenabstand von einer Wellenlänge entsprach. Derselbe war dann ungefähr gleich dem Vierfachen der Antennenlänge.

§ 6. Theorie der Methode für schnelle Schwingungen.

Bei der Ableitung der für den nicht quasistationären Fall gültigen Formeln, die für die im vorigen Paragraphen beschriebene Versuchsanordnung gilt, folgen wir wieder den Ausführungen von Cohn¹⁾, berücksichtigen aber die magnetische Leitfähigkeit und nehmen das Vorhandensein einer fremden elektromotorischen Kraft E_f an.

Die Fig. 8 stelle einen Längsschnitt durch die Paralleldrähte dar. Wir wenden die zweite Maxwellsche Gleichung

$$(63) \quad -\frac{\partial Q}{\partial t} = \int E_s ds,$$

in der Q den Induktionsfluß bedeutet, auf das Rechteck $abcd$ an, das in der Richtung der Pfeile umlaufen werde.

Es sei $\overline{bc} = \overline{ad} = 1$. Dann gilt

$$(64) \quad E_f - L_a \frac{\partial j}{\partial t} = \int_a^b E_s ds + \int_c^d E_s ds + [E_z(+)-E_z(-)],$$

wenn die Zeichen $+$ und $-$ als Argumente von E sich auf den in positiver bzw. negativer z -Richtung durchströmten Draht beziehen.

Ferner ist

$$(65) \quad \int_a^b E_s ds = \frac{e}{C},$$

wenn L_a die äußere Selbstinduktion der stationär durchströmten Doppeldrähte, C ihre elektrostatische Kapazität, beide auf die Längeneinheit berechnet, bedeuten, und e die Ladung der Längeneinheit bezeichnet.

Hieraus ergibt sich

$$(66) \quad E_f - L_a \frac{\partial j}{\partial t} = \frac{1}{C} \frac{\partial e}{\partial x} + [E_z(+)-E_z(-)].$$

1) E. Cohn, Das elektromagnetische Feld. Leipzig 1900. S. 475.

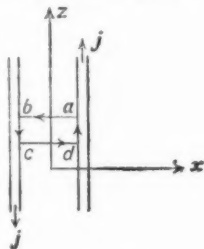


Fig. 8.

Da aber aus der Kontinuitätsgleichung

$$(67) \quad \frac{\partial j}{\partial z} = - \frac{\partial e}{\partial t}$$

folgt, so erhalten wir

$$(68) \quad - \frac{\partial \mathbf{E}_z}{\partial t} + L_a \frac{\partial^2 j}{\partial t^2} = \frac{1}{C} \frac{\partial^2 j}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial t} [E_z(+)-E_z(-)].$$

Sind j und E rein periodische Funktionen der Zeit mit der Frequenz ω , die eine Phasenverschiebung gegeneinander haben können, so kann man stets zwei Konstante w und L finden, so daß die Gleichung gilt

$$(69) \quad E_z(+)-E_z(-) = w j + (L - L_a) \frac{\partial j}{\partial t}.$$

Damit wird aus Gleichung (68) die Telegraphengleichung

$$(70) \quad \frac{\partial^2 j}{\partial t^2} + \frac{w}{L} \frac{\partial j}{\partial t} - \frac{1}{LC} \frac{\partial^2 j}{\partial z^2} = \frac{1}{L} \frac{\partial \mathbf{E}_z}{\partial t}.$$

Den Term der rechten Seite nehmen wir als gedämpfte harmonische Funktion an und erhalten somit

$$(71) \quad \frac{\partial^2 j}{\partial t^2} + \frac{w}{L} \frac{\partial j}{\partial t} - \frac{1}{LC} \frac{\partial^2 j}{\partial z^2} = A e^{-A_1 t} \sin \omega_1 t.$$

A ist eine Funktion von z und läßt sich zwischen den Brücken $z=0$ und $z=l$ darstellen durch

$$(72) \quad A = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos \frac{n \pi z}{l}.$$

Ferner setzen wir

$$(73) \quad j = \sum_{n=0}^{\infty} j_n \cos \frac{n \pi z}{l},$$

wodurch die Grenzbedingungen an den Brücken

$$\frac{\partial j}{\partial z} = 0 \quad \text{für} \quad z=0 \quad \text{und} \quad z=l$$

erfüllt sind. Auf diese Weise wird

$$(74) \quad \frac{d^2 j_n}{dt^2} + \frac{w}{L} \frac{dj_n}{dt} + \frac{n^2 \pi^2}{l^2 LC} j_n = A_n e^{-A_1 t} \sin \omega_1 t.$$

Setzt man

$$(75) \quad \frac{w}{L} = 2 A_2; \quad \frac{n^2 \pi^2}{l^2 LC} = \omega_{2n}^2 + A_2^2,$$

so hat man das Problem auf die gewöhnliche Schwingungsgleichung

$$(76) \quad \frac{d^2 j_n}{dt^2} + 2 A_2 \frac{dj_n}{dt} + (\omega_{2n}^2 + A_2^2) j_n = A_n e^{-A_1 t} \sin \omega_1 t$$

zurückgeführt. Uns interessiert für den Fall der Resonanz

$$\omega_{2n} = \omega_1 = \omega$$

der Wert des logarithmischen Dekrements

$$(77) \quad \delta_2 = \frac{2 \pi A_2}{\omega} = \frac{\pi w}{L \omega},$$

welches wir jetzt berechnen wollen.

Aus Gleichung (69) folgt

$$(78) \quad \frac{E_2(+)}{j} \frac{E_2(-)}{j} = w + i \omega (L - L_a).$$

Sieht man von der Krümmung der Drahtoberfläche ab, in der die Strömung ausschließlich verläuft, und führt als Argument von E die Normale h des Drahtes (positiv nach innen) ein, so folgt aus Gleichung (33) und (55)

$$(79) \quad E(h) = E(0) e^{-ikh},$$

also

$$(80) \quad j = 2 \pi \alpha \sigma E(0) \int_0^\infty e^{-ikh} dh = \frac{2 \pi \alpha \sigma E(0)}{ik}$$

und

$$(81) \quad \frac{E_2(+)}{j} = \frac{E_2(-)}{-j} = \frac{ik}{2 \pi \alpha \sigma}.$$

Folglich ergibt Gleichung (78) mit Berücksichtigung von Gleichung (53) und (54)

$$(82) \quad w + i \omega (L - L_a) = \frac{2 \alpha (I' + i I'')}{\pi \alpha^2 \sigma},$$

d. h.

$$(83) \quad \begin{cases} w = 2 \Gamma \sqrt{\pi \mu n w_1}, \\ 2 \pi n L_i = 2 I'' \sqrt{\pi \mu n w_1}. \end{cases}$$

Der Widerstand ist also sehr groß, da n beträchtliche Werte hat, dagegen nähert sich aus demselben Grunde L_i der Null, es kann also $L = L_a + L_i$ mit L_a identifiziert werden.

Aus Gleichung (77) und (83) berechnet sich somit das logarithmische Dekrement zu

$$(84) \quad \delta_2 = \frac{\pi}{L_a} \Gamma \sqrt{\frac{2 \mu w_1}{\omega}} = \frac{\Gamma}{L_a} \sqrt{\frac{\pi \mu w_1}{n}}.$$

Diese Gleichung ist von der für den stationären Fall berechneten Gleichung (60) inhaltlich nicht verschieden, weil jetzt L_a die äußere Selbstinduktion des *Doppelleiters* pro Längeneinheit bedeutet, während früher derselbe Buchstabe die gesamte äußere Selbstinduktion des Drahtes der Länge l darstellte.

Somit ergibt sich unter Berücksichtigung von Gleichung (54) und (61) aus (84) der Wert für die scheinbare Permeabilität

$$(85) \quad \mu^* = \mu \Gamma^2 = \mu \left[\sqrt{1 + \gamma^2} + \gamma \right] = (\delta_2 L_a)^2 \frac{n}{\pi w_1}.$$

Es sei noch hinzugefügt, daß L_a in dieser Formel den Wert

$$(86) \quad L_a = 4 \ln \frac{d-a}{a}$$

hat, wenn d den Abstand der Drähte vom Radius a bedeutet.

Die Formeln (58) und (83) stellen den Widerstand unter der Voraussetzung dar, daß die Primärschwingungen, welche die Wellen erregen, ungedämpft sind. Wir müssen also noch untersuchen, welchen Einfluß das Dekrement δ_1 des Erregers (d. h. des Kreises II in § 3 (Fig. 6) bzw. der Antennen in § 5 (Fig. 7) auf die Formel (61) bzw. (85) hat.

Dabei dürfen wir δ_1 stets als sehr kleine Größe annehmen, da der in Betracht kommende Wert $\delta_1/2\pi$ bei unseren Messungen stets kleiner als 0,015 war.

Wir haben also in Gleichung (52) ω durch $\omega \left(1 + i \frac{\delta_1}{2\pi}\right)$ zu ersetzen, und ebenso in Gleichung (53) und (54). Dann wird aus der für schnelle Schwingungen geltenden Gleichung (57)

$$(87) \quad \frac{w + i L_i \omega \left(1 + i \frac{\delta_1}{2\pi}\right)}{w_0} = \frac{k a i}{2} = \alpha (\Gamma + i \Gamma') \left(1 + i \frac{\delta_1}{4\pi}\right).$$

Zerlegung in reellen und imaginären Teil ergibt

$$(88) \quad \begin{cases} \frac{w - \omega \frac{\delta_1}{2\pi} L_i}{w_0} = \alpha \left(\Gamma - \Gamma' \frac{\delta_1}{4\pi} \right), \\ \frac{\omega L_i}{w_0} = \alpha \left(\Gamma' + \Gamma \frac{\delta_1}{4\pi} \right). \end{cases}$$

Multipliziert man die zweite Gleichung mit $\delta_1/2\pi$ und addiert sie zur ersten, so erhält man

$$(89) \quad \frac{w}{w_0} = \alpha \left(\Gamma + \frac{\delta_1}{4\pi} \Gamma' \right) = \alpha \Gamma \left(1 + \frac{\delta_1}{4\pi} \frac{\Gamma'}{\Gamma} \right),$$

oder durch Quadrierung

$$(90) \quad w^2 = l^2 \pi \mu n w_1 \left(\Gamma^2 + \frac{\delta_1}{2\pi} \right),$$

da $\Gamma \Gamma' = 1$ ist. Schließlich ergibt Gleichung (59)

$$(91) \quad \mu \left[\sqrt{1 + \gamma^2} + \gamma + \frac{\delta_1}{2\pi} \right] + \left(\frac{2 L_a \delta_2}{l} \right)^2 \frac{n}{\pi w_1}.$$

Da nun $\delta_1/2\pi$ stets äußerst klein bei unseren Messungen war, können wir an dieser Stelle den Einfluß der Dämpfung der erregenden Wellen vernachlässigen und mit Gleichung (61) bzw. (85) rechnen.

§ 7. Auswertung der Resonanzkurven.

Aus den Resonanzkurven wurde nach der Bjerknesschen Theorie¹⁾ die Summe der logarithmischen Dekremente der erregenden und der erregten Schwingung nach der bekannten Formel²⁾

$$(92) \quad y = \frac{1}{1 + \frac{x^2}{\Theta^2}}$$

ermittelt, aus der sich

$$(93) \quad \Theta = \frac{\delta_1 + \delta_2}{2\pi} = |x| \sqrt{\frac{y}{1-y}}$$

ergibt. Hier bedeutet die Abszisse x die Verstimmung

$$1 - \frac{n_2}{n_1} = 1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$$

(λ_1 und λ_2 die resp. Wellenlängen), während die Ordinate y das Verhältnis des Galvanometerausschlags e zu dem maximalen Galvanometerausschlag e_0 bedeutet, denn diese Ausschläge sind den Quadraten der effektiven Stromstärken proportional.

Infolge der schlechten Qualität des Leuchtgases, das zur Erregung der Löschfunken diente, ging bei den kürzesten Wellen die Resonanzkurve manchmal in größeren Abständen von der Resonanzstelle nicht mehr merklich auf Null zurück, der Erreger sandte also — optisch gesprochen — ein schwaches

1) V. Bjerknes, Wied. Ann. 55, S. 121. 1895.

2) J. Zenneck, Elektromagn. Schwingungen u. drahtlose Telegraphie. Stuttgart 1905. S. 595.

kontinuierliches Spektrum aus, dem sich eine helle homogene Linie überlagerte.

Um trotz dieses Residuums, welches bei der Resonanzkurve blieb, die Dekrementensumme ermitteln zu können, verfahren wir folgendermaßen.

Nach Gleichung (93) ist

$$\frac{e}{e_0} = \frac{1}{1 + \left(\frac{x_2}{\Theta}\right)^2}.$$

Führen wir $e_0 - e = z$ als neue Ordinate ein (vgl. Fig. 9), so erhalten wir für zwei verschiedene Kurvenpunkte

$$(94) \quad \frac{z_1}{e_0} = \frac{\left(\frac{x_1}{\Theta}\right)^2}{1 + \left(\frac{x_1}{\Theta}\right)^2}; \quad \frac{z_2}{e_0} = \frac{\left(\frac{x_2}{\Theta}\right)^2}{1 + \left(\frac{x_2}{\Theta}\right)^2},$$

woraus sich

$$(95) \quad \Theta = x_1 x_2 \sqrt{\frac{z_1 - z_2}{z_2 x_1^2 - z_1 x_2^2}}$$

ergibt.

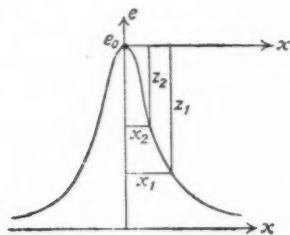


Fig. 9.

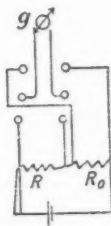


Fig. 10.

§ 8. Bestimmung des Widerstandes der Längeneinheit.

In unseren Formeln kommt der Widerstand w_1 der Längeneinheit des Drahtes vor. Derselbe wurde dadurch gemessen, daß ein Galvanometer G von großem Widerstand als Spannungsmesser an die Enden eines vom Strom durchflossenen Drahtstückes R bekannter Länge, sodann mittels Umlegens der Quecksilberwippe C an die Klemmen eines vom selben Strom durchflossenen bekannten Widerstands R_0 (vgl. Fig. 10) gelegt wurde.

Es ergab sich

| Widerstand | Galvanische Ablenkung | | |
|---------------------------------|-----------------------|-------|-------|
| | I | II | III |
| $R_0 = 0,4 \, \Omega$ | 106,0 | 106,0 | 106,0 |
| $R_0 = 0,3 \, \Omega$ | 79,5 | 79,5 | 79,5 |
| R | 105,5 | 106,5 | 106,2 |

Jeder Galvanometerausschlag ist das Mittel aus zwei Ausschlägen nach rechts und links, die mittels eines in der Figur nicht gezeichneten Kommutators hervorgerufen wurden.

Aus den Beobachtungen folgt

$$R = 0,3996 \, \Omega,$$

$$\text{Länge } 80,6 \text{ cm},$$

$$w_1 = 496,0 \cdot 10^1.$$

w_1 ist in elektromagnetischen Einheiten gemessen.

§ 9. Die Ergebnisse für lange Wellen.

Die Dimensionen des Rechtecks aus Kupferdraht, welcher den Schwingungskreis III bildete (vgl. § 8), waren die folgenden

$$l = 47,7 \text{ cm}; \quad b = 14,5 \text{ cm}; \quad a = 0,0305 \text{ cm}.$$

Daraus berechnet sich nach Formel (23) $L_a = 1453,4 \text{ cm}$. Da die schädliche Selbstinduktion des Kondensators zu $P = 47 \text{ cm}$ bestimmt war, folgt $L_a + P = 1500 \text{ cm}$.

Die Kapazität, welche Resonanz des Kreises III mit dem Kreise II ergab, bestimmte sich mittels der Eichkurve des Kondensators zu 496 cm , d. h. im elektromagnetischen System zu $C = 496 \cdot \frac{1}{9} \cdot 10^{-20}$, so daß sich mittels der Lord Kelvinschen Formel für die Schwingungszahl der angenäherte Wert

$$n = \frac{1}{2\pi\sqrt{C(L_a + P)}} = 5,537 \cdot 10^6 \frac{1}{\text{sec}}$$

ergibt. Angenähert ist dieser Wert nur, weil eigentlich $L_a + P + L_i$ in Rechnung gezogen werden müßte, wir aber die innere Selbstinduktion L_i als unbekannt fortgelassen haben. Mittels des genäherten Wertes für n können wir dieselbe aber berechnen und dann n korrigieren.

Nach Gleichung (54) gilt für Kupfer ($\mu = 1$)

$$\alpha = \sqrt{\frac{\pi n}{w_1}} = a \pi \sqrt{n \sigma}.$$

Da aber die Leitfähigkeit $\sigma = 5,88 \cdot 10^{-4}$ ist, so ergibt sich $\alpha = 5,467$. Für so große Argumente gibt es eine bequeme Näherungsformel für L_1), nämlich

$$(96) \quad \frac{L_1 2\pi n}{w_0} = 1,007 \alpha - 0,040 ,$$

wo w_0 den Widerstand für $n = 0$ bedeutet. Da die Drahtlänge 121 cm ist, so ist $w_0 = 121 w_1$ leicht berechenbar, und es ergibt sich $L_1 = 11,1$, so daß

$$L = L_a + L_1 + P = 1511$$

ist. Nun berechnet sich der genaue Wert von n gemäß

$$n = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad \text{zu} \quad n = 5,516 \cdot 10^6 \frac{1}{\text{sec}} .$$

Durch Aufnahme von Resonanzkurven ergibt sich, wenn der Kreis III aus Nickeldraht bestand, durch direkte Auswertung zweier Paare von Meßreihen nach Gleichung (92)

$$\delta_1 + \delta = 0,2730 \text{ bzw. } 0,2502. \quad \text{Mittel } \delta_1 + \delta = 0,2616.$$

Bestand er aus Kupferdraht,

$$\delta_1 + \delta_0 = 0,0568 \text{ bzw. } 0,0603. \quad \text{Mittel } \delta_1 + \delta_0 = 0,0585.$$

Hier bedeutet δ_1 das logarithmische Dekrement des Kreises II, δ bzw. δ_0 das des Kreises III, wenn er aus Nickel- bzw. Kupferdraht gebildet war. Also war

$$\delta - \delta_0 = 0,2616 - 0,0585 = 0,2031.$$

Der Wert von δ_0 berechnet sich nun gemäß Gleichung (59) nach

$$\delta_0 = \frac{w}{2nL} ,$$

wo

$$(97) \quad w = w_0 (0,997 \alpha + 0,277)$$

ist²⁾, und es ergibt sich mit

$$\alpha = 5,467; \quad n = 5,516 \cdot 10^6; \quad L = 1511; \quad \delta_0 = 0,0242,$$

so daß schließlich

$$\delta = 0,2031 + 0,0242 = 0,2273$$

wird.

1) J. Zenneck, Ann. d. Phys. 11. S. 1141. 1903.

2) Vgl. J. Zenneck, a. a. O.

Die Selbstinduktion L' des Kreises III aus Nickeldraht ergibt sich durch Resonanzbeobachtung bezüglich des Kreises II; dieselbe trat ein für $C' = 462,7$ cm, so daß

$$C' \cdot L' = C \cdot L = 496 \cdot 1511,$$

d. h.

$$L' = 1620$$

ist. Bei so langen Wellen ist, wie man später leicht bestätigen kann, $\gamma = 0$ (vgl. Gleichung (32)), also nach (54) $\Gamma = 1$. Somit gilt für den Widerstand des Nickeldrahtes (58) oder bequemer (97), und es folgt aus Gleichung (59)

$$(98) \quad 2 n L' \delta = w_0 (0,997 \alpha + 0,277).$$

Da der Draht 121 cm lang war, w_1 aber nach § 8 $496,0 \cdot 10^4$ ist, so gilt $w_0 = 121 \cdot 496 \cdot 10^4$. Somit berechnet sich aus Gleichung (98)

$$\alpha = 6,511.$$

Schließlich ergibt sich aus Gleichung (54)

$$(99) \quad \mu = \frac{\alpha^2 w_1}{\pi n},$$

woraus

$$\mu = 12,13 \quad \text{für} \quad n = 5,516 \cdot 10^6$$

bei Nickel folgt, und da $\gamma = 0$ ist, hat μ^* denselben Wert.

§ 10. Die Ergebnisse für kurze Wellen.

Für kurze Wellen ergaben sich die folgenden Resultate.

| λ in cm | Beobachtet in | | Diff. $\delta - \delta_0$ | δ_0 | δ | Mittel δ | μ^* |
|--------------------|---------------------------|-----------------------------|------------------------------|------------|----------|--------------------|---------|
| | Ni $\delta_1 + \delta$ | Cu $\delta_1 + \delta_0$ | | | | | |
| 100,4 | 0,0707 | 0,0247 | 0,0460 | 0,0054 | 0,0514 | 0,0506 | 14,67 |
| | 0,0659 | 0,0214 | 0,0445 | 0,0054 | 0,0499 | | |
| 60,5 | 0,0647(a) | 0,0225(b) | 0,0422 | 0,0042 | 0,0464 | 0,0444 | 18,73 |
| | 0,0624 | 0,0242(c) | 0,0382 | 0,0042 | 0,0424 | | |
| 36,0 | 0,0689(d) | 0,0350 | 0,0339 | 0,0032 | 0,0371 | 0,0354 | 20,01 |
| | 0,0690 | 0,0384 | 0,0306 | 0,0032 | 0,0338 | | |
| 31,5 | 0,0687(e) | 0,0397 | 0,0290 | 0,0030 | 0,0320 | 0,0346 | 21,85 |
| | 0,0713(f) | 0,0371 | 0,0342 | 0,0030 | 0,0372 | | |
| 22,8 | 0,1170 | 0,0935(g) | 0,0235 | 0,0026 | 0,0261 | 0,0261 | 17,17 |
| 21,2 | 0,1161(h) | 0,0983(i) | 0,0178 | 0,0025 | 0,0203 | 0,0204 | 11,28 |
| | 0,0960 | 0,078 | 0,0180 | 0,0025 | 0,0205 | | |

Die erste Kolonne enthält die Wellenlänge, die sich ohne weiteres aus dem Abstände der festen Brücke von der beweglichen ergibt. Die zweite Kolonne enthält das aus der Resonanzkurve ermittelte logarithmische Dekrement bei Nickeldrähten, oder vielmehr die Summe der Dekremente des Doppeldrahtkreises δ und der Antennen des Senders δ_1 , denn diese Summe mißt man nach der Resonanzmethode. Die dritte Kolonne gibt die entsprechenden Werte, wenn die Nickeldrähte durch Kupferdrähte ersetzt waren (δ_0 Dekrement des Doppeldrahtkreises aus Kupfer). Die vierte Kolonne enthält die Differenz der Werte der zweiten und dritten Kolonne, die fünfte gibt δ_0 , welches nach Gleichung (85) und (86) für $\mu = 1$ und $\gamma = 0$

$$(100) \quad \delta_0 = \frac{1}{4a \ln \frac{d-a}{a}} \sqrt{\frac{1}{n\sigma}} = \frac{1}{4a \ln \frac{d-a}{a}} \sqrt{\frac{\lambda}{c\sigma}},$$

wo $d = 2,10$ cm den Drahtabstand, $a = 0,025$ cm ihren Radius, λ die Wellenlänge, $c = 3 \cdot 10^{10}$ die Lichtgeschwindigkeit, σ die Leitfähigkeit des Kupfers bedeutet. Die sechste Kolonne enthält die Summe der Zahlen der vierten und fünften, d. h. das Dekrement im Nickelkreis, wenn der Sender ungedämpft wäre, die siebente die Mittelwerte von δ , die achte die nach Gleichung (85) und (86) berechnete scheinbare Permeabilität des Nickels.

Hier ist $d = 2,10$ cm; $a = 0,0275$ cm; $w_1 = 496 \cdot 10^4$ (vgl. § 8). Bei den Messungen für $\lambda = 21,2$ zeigt sich, was wir manchmal festzustellen Gelegenheit hatten, daß in zwei zu verschiedenen Zeiten angestellten Meßreihen $\delta_1 + \delta$ ziemlich verschieden ist, dagegen δ doch fast die gleichen Werte hat; hier hat sich die Dämpfung des Senders eben in der Zwischenzeit geändert. Doch das schadet nichts, da $\delta_1 + \delta$ und $\delta_1 + \delta_0$ stets unmittelbar hintereinander bestimmt waren.

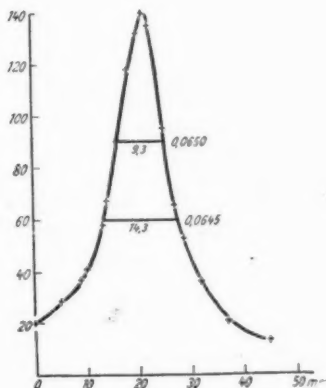
Man sieht deutlich, daß $\delta_1 + \delta$ sowie $\delta_1 + \delta_0$ für lange Wellen (§ 9) stark verschieden sind, sich aber mit abnehmender Wellenlänge immer mehr einander nähern. Da man nun ihre Differenz $\delta - \delta_0$ gebraucht, so ist klar, daß die Genauigkeit der Methode mit abnehmender Wellenlänge immer geringer wird.

Um nicht zu ausführlich zu werden, wollen wir nicht alle Beobachtungszahlen wiedergeben, wohl aber die einiger herausgegriffener Resonanzkurven, die wir in der Tabelle mit den

Buchstaben *a* bis *i* bezeichnet haben. Es ist zu bemerken, daß die Galvanometerempfindlichkeit durch Nebenschlüsse in geeigneter Weise geändert wurde, so daß die Maximalausschläge verschiedener Resonanzkurven nicht miteinander vergleichbar sind.

Kurve *a* (Fig. 11)
Ni $\lambda = 60,5$ cm

| Brücken- stellung in mm | Galv. Ausschl. |
|-------------------------------|-------------------|
| 0 | 20 |
| 5 | 28 |
| 8 | 37 |
| 10 | 41 |
| 13 | 58 |
| 14 | 67 |
| 16 | 90 |
| 18 | 118 |
| 20 | 132 |
| 21 | 140 |
| 22 | 135 |
| 25 | 95 |
| 27 | 66 |
| 29 | 52 |
| 32 | 36 |
| 37 | 21 |
| 45 | 13 |

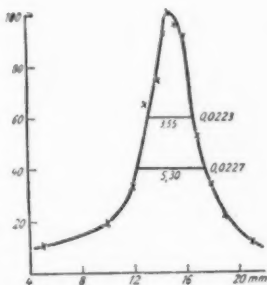


Resonanzkurve *a*
Nickel $\lambda = 60,5$ cm $\delta_1 + \delta = 0,0647$

Fig. 11.

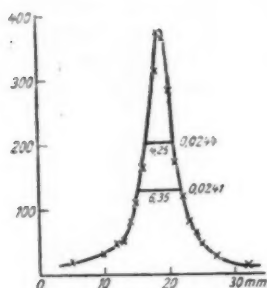
Kurve *b* (Fig. 12)
Cu $\lambda = 60,5$ cm

| Brücken- stellung in mm | Galv. Ausschl. |
|-------------------------------|-------------------|
| 5 | 11 |
| 10 | 19 |
| 12 | 33 |
| 13 | 65 |
| 14 | 74,5 |
| 14,5 | 93 |
| 15 | 101 |
| 15,4 | 96 |
| 16 | 92 |
| 17 | 53 |
| 18 | 34 |
| 19 | 22 |
| 21 | 12 |



Resonanzkurve *b*
Kupfer $\lambda = 60,5$ cm $\delta_1 + \delta_0 = 0,0225$

Fig. 12.



Resonanzkurve c

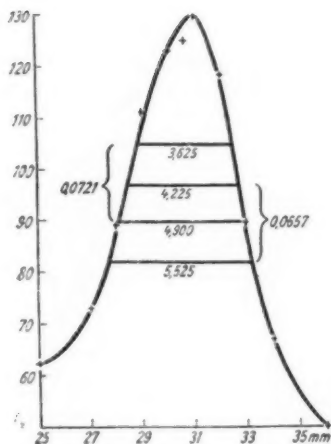
Kupfer $\lambda = 60,5 \text{ cm}$ $\delta_1 + \delta_0 = 0,0242$

Fig. 13.

Kurve c (Fig. 13)

Cu $\lambda = 60,5 \text{ cm}$

| Brücken- stellung in mm | Galv. Ausschl. |
|-------------------------------|-------------------|
| 5 | 18 |
| 10 | 32 |
| 12 | 47 |
| 13 | 49 |
| 14 | 81 |
| 15 | 110 |
| 16 | 165 |
| 18 | 315 |
| 18,5 | 373 |
| 19 | 383 |
| 20 | 286 |
| 21 | 173 |
| 22 | 121 |
| 23 | 79 |
| 24 | 65 |
| 25 | 45 |
| 27 | 27 |
| 32 | 13 |



Resonanzkurve d

Nickel $\lambda = 36,0 \text{ cm}$ $\delta_1 + \delta = 0,0689$

Fig. 14.

Kurve d (Fig. 14)

Ni $\lambda = 36,0 \text{ cm}$

| Brücken- stellung in mm | Galv. Ausschl. |
|-------------------------------|-------------------|
| 25 | 62 |
| 27 | 73 |
| 28 | 89 |
| 29 | 111 |
| 30 | 123 |
| 30,6 | 125 |
| 31 | 129,5 |
| 32 | 118,5 |
| 33 | 90 |
| 34 | 67 |
| 36 | 50 |

Kurve e (Fig. 15)

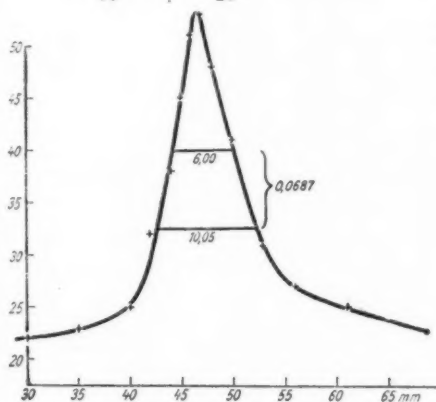
Ni $\lambda = 31,5$ cm

| Brücken- stellung in mm | Galv. Ausschl. |
|-------------------------------|-------------------|
| 30 | 22 |
| 35 | 23 |
| 40 | 25 |
| 42 | 32 |
| 44 | 38 |
| 45 | 45 |
| 46 | 51 |
| 47 | 53 |
| 48 | 48 |
| 50 | 41 |
| 53 | 31 |
| 56 | 27 |
| 61 | 25 |
| 70 | 23 |

Kurve f (Fig. 16)

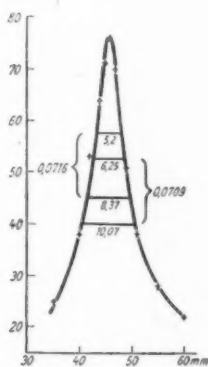
Ni $\lambda = 31,5$ cm

| Brücken- stellung in mm | Galv. Ausschl. |
|-------------------------------|-------------------|
| 35 | 25 |
| 40 | 38 |
| 42 | 53 |
| 44 | 64 |
| 45 | 71 |
| 46 | 76 |
| 47 | 70 |
| 49 | 51 |
| 51 | 38 |
| 55 | 28 |
| 60 | 22 |



Resonanzkurve e Nickel $\lambda = 31,5$ cm $\delta_1 + \delta = 0,0687$

Fig. 15.



Resonanzkurve f
Nickel $\lambda = 31,5$ cm

$\delta_1 + \delta = 0,0713$

Fig. 16.

Kurve g (Fig. 17) Cu $\lambda = 22,8$ cm

| Brücken- stellung in mm | Galv. Ausschl. | Brücken- stellung in mm | Galv. Ausschl. |
|-------------------------------|-------------------|-------------------------------|-------------------|
| 25 | 99 | 34 | 174 |
| 28 | 152 | 35 | 146 |
| 30 | 221 | 37 | 109 |
| 32 | 239 | 40 | 89 |
| 33 | 214 | | |

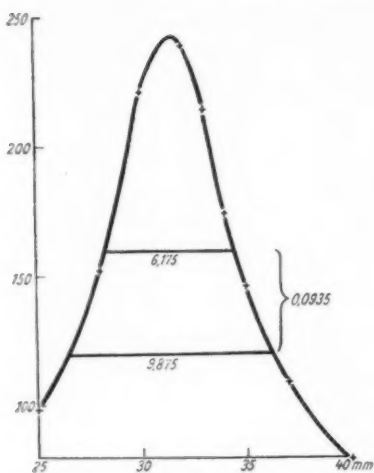
Resonanzkurve *g*Kupfer $\lambda = 22,8$ cm $\delta_1 + \delta_0 = 0,0935$

Fig. 17.

Kurve *h* (Fig. 18)Ni $\lambda = 21,2$ cm

| Brücken- stellung in mm | Galv. Ausschl. |
|-------------------------------|-------------------|
| 10 | 55 |
| 15 | 61 |
| 20 | 67 |
| 22 | 76 |
| 24 | 98 |
| 25 | 108 |
| 26 | 125 |
| 27 | 141 |
| 28 | 148 |
| 28,5 | 151 |
| 29 | 148 |
| 30 | 134 |
| 31 | 115 |
| 32 | 96 |
| 33 | 85 |
| 34 | 73 |
| 36 | 68 |
| 40 | 65 |

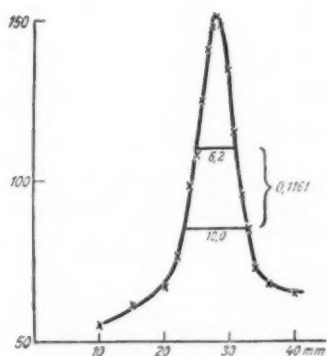
Resonanzkurve *h*Nickel $\lambda = 21,2$ cm $\delta_1 + \delta = 0,1161$

Fig. 18.

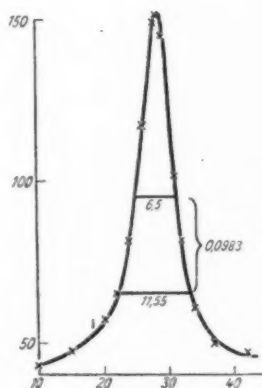
Resonanzkurve *i*Kupfer $\lambda = 21,2$ $\delta_1 + \delta_0 = 0,0983$

Fig. 19.

Kurve i (Fig. 19) Cu $\lambda = 21,2$ cm

| Brücken- stellung in mm | Galv. Ausschl. | Brücken- stellung in mm | Galv. Ausschl. |
|-------------------------------|-------------------|-------------------------------|-------------------|
| 10 | 43 | 28,5 | 151 |
| 15 | 47 | 29 | 145 |
| 20 | 57 | 31 | 102 |
| 22 | 65 | 32 | 82 |
| 24 | 82 | 34 | 61 |
| 26 | 117 | 37 | 50 |
| 28 | 149 | 42 | 47 |

Stellen wir die Resultate zusammen, so erhalten wir

| Schwingungs- zahl n in 1/sec | Wellenlänge λ in cm | μ^* |
|-----------------------------------|--------------------------------|---------|
| 0 | ∞ | 11,8 |
| $5,52 \cdot 10^6$ | $5,44 \cdot 10^3$ | 12,13 |
| $2,99 \cdot 10^8$ | 100,4 | 14,67 |
| $4,96 \cdot 10^8$ | 60,5 | 18,73 |
| $8,33 \cdot 10^8$ | 36,0 | 20,01 |
| $9,52 \cdot 10^8$ | 31,5 | 21,85 |
| $13,16 \cdot 10^8$ | 22,8 | 17,17 |
| $14,16 \cdot 10^8$ | 21,2 | 11,28 |

Auch an Eisen wurden Versuche gemacht. Diese zeigen zweifellos eine Abnahme der Permeabilität für kleine Wellenlängen ($\lambda = 20$ cm) gegenüber dem stationären Wert, jedoch sind die quantitativen Resultate zu ungenau, um veröffentlicht zu werden, die Resonanzkurven zeigen vielfach Assymmetrien im Gegensatz zu den Ergebnissen bei Nickel, und eine einzelne Resonanzkurve ergibt häufig überhaupt keinen konstanten Wert für das Dekrement.

Diese Messungen müßten mit noch weniger gedämpften Wellen, wie man sie jetzt mittels Vakuumröhren erzeugt, wiederholt werden.

§ 11. Die molekularen Konstanten.

Um die Versuchsergebnisse mit der Theorie (§ 1) zu vergleichen, haben wir den Konstanten der Gleichungen (19) durch Probieren die folgenden Werte gegeben.

$$4\pi \kappa_0 = 11,0; \quad \epsilon = 1,3; \quad n_0' = 1,294 \cdot 10^9$$

oder
$$\lambda_0' = \frac{3 \cdot 10^{10}}{n_0'} = 24,3 \text{ cm.}$$

Mit diesen berechnet sich nach Gleichung (19) die folgende Tabelle.

| $\frac{n_0'}{n} = \frac{\lambda}{\lambda_0'}$ | $\frac{n}{n_0'}$ | $\mu = 1 + 4\pi n$ | $\mu \gamma = \frac{2\rho}{n}$ | π^* | $\varrho \cdot 10^{-8}$ | λ in cm |
|---|------------------|--------------------|--------------------------------|---------|-------------------------|-----------------|
| 10 | 0,1000 | 11,92 | 1,434 | 13,43 | 0,885 | 243 |
| 6 | 0,1667 | 11,77 | 2,402 | 14,41 | 2,472 | 145,8 |
| 4 | 0,2500 | 11,48 | 3,633 | 15,66 | 5,607 | 97,2 |
| 3 | 0,3333 | 11,00 | 4,873 | 16,90 | 10,02 | 72,9 |
| 2 | 0,5000 | 9,377 | 7,259 | 19,12 | 22,41 | 48,6 |
| 1,5 | 0,6667 | 6,767 | 8,995 | 20,26 | 37,02 | 36,5 |
| 1,3 | 0,7692 | 4,850 | 9,423 | 20,01 | 44,74 | 31,6 |
| 1 | 1,000 | 0,000 | 8,461 | 16,92 | 52,24 | 24,3 |
| 0,8 | 1,250 | -1,094 | 6,045 | 12,19 | 46,65 | 19,4 |
| 0,5 | 2,000 | -1,094 | 1,814 | 3,932 | 22,40 | 12,2 |
| 0 | ∞ | 1,000 | 0,000 | 1,000 | 0,00 | 0,0 |

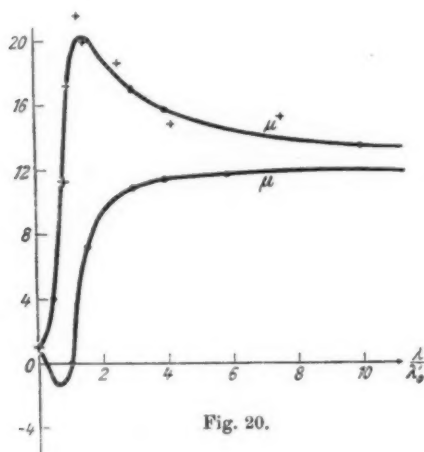


Fig. 20.

Die Fig. 20 stellt die theoretischen Werte von μ und μ^* als Funktionen von λ/λ_0' dar. Die Kreuze bedeuten die beobachteten Werte von μ^* . Bedenkt man, daß die Werte für $\lambda = \infty$ und $\lambda = 5,44 \cdot 10^3$ wegen des zu großen Maßstabes nicht in das Diagramm eingezeichnet werden konnten, daß diese Punkte aber praktisch auf die theoretische Kurve fallen (11,8 bzw. 12,13 anstatt 12,0) und daß für sehr kleine Wellenlängen

(Licht) $\mu = 1$ ist¹⁾, so muß man die Übereinstimmung befriedigend nennen.

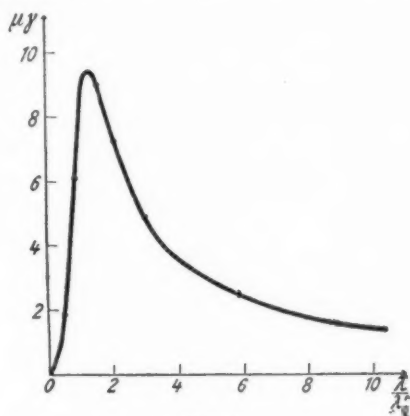


Fig. 21.

Fig. 21 gibt die Werte von $\mu\gamma = 2\varrho/n$ [vgl. Gleichung (32)] als Funktion von λ/λ_0 .

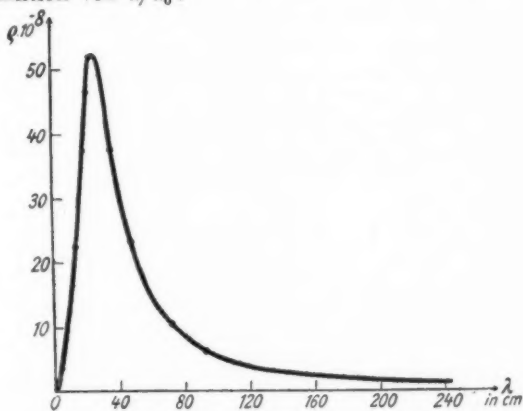


Fig. 22.

Die letzten beiden Kolonnen der Tabelle sowie die Fig. 22 stellen die magnetische Leitfähigkeit als Funktion der Wellen-

1) E. Hagen u. H. Rubens, Ann. d. Phys. 11. S. 900. 1903.

länge dar. Diese Größe ist, soviel wir wissen, bisher noch nicht bestimmt worden.¹⁾

Aus Fig. 20 ersieht man deutlich, daß die scheinbare Permeabilität μ^* ein Maximum hat, während die wahre Permeabilität μ keins besitzt, da $\varepsilon > 1$ ist. Würden wir nicht auf Grund der Theorie erkannt haben, daß man eine magnetische Leitfähigkeit annehmen muß, so hätten die Ergebnisse der Beobachtungen uns zu dem Glauben geführt, daß die Permeabilität infolge von Resonanz größer als im stationären Fall wird. Tatsächlich verhindert die große Reibung aber dieses Anschwellen.

Es erübrigt noch, einige auf die Magnetonen bezügliche Zahlenwerte abzuleiten.

1. Das Trägheitsmoment. Nach Gleichung (19) ist

$$(101) \quad \frac{NM^2}{6\pi^2 J n_0'^2} = \kappa_0.$$

κ_0 und n_0' haben wir soeben bestimmt, $NM = M_\infty$ ist die Sättigungsmagnetisierung, M das magnetische Moment eines Elementarmagneten. Kennt man alle diese Größen, so läßt sich das Trägheitsmoment J in absolutem Maße berechnen.

Nun bedeutet N die Anzahl Elementarmagnete in der Volumeinheit, also befinden sich $N a/d$ im Grammatom, unter a das Atomgewicht, unter d die Dichte verstanden. Nimmt man an, daß jedes Atom einen Elementarmagneten hat, so muß

$$(102) \quad \frac{Na}{d} = N_0 = 6,175 \cdot 10^{23}$$

die Avogadrosche Zahl bedeuten.

Also folgt aus Gleichung (101) mittels (102) für das Trägheitsmoment J

$$(103) \quad J = \frac{2 a M_\infty^2}{8 \pi (4 \pi \kappa_0) n_0'^2 N_0 d}.$$

Nun gilt für Nickel $M_\infty^2 = 521$; $4 \pi \kappa_0 = 11,0$; $n_0' = 1,234 \cdot 10^9$; $a = 58,68$; $d = 8,86$, also folgt

$$J = 369 \cdot 10^{-40} \text{ g cm}^2.$$

1) Vgl. jedoch W. Arkadiew, Physik. Zeitschr. 14. S. 928. 1913, der für q_{\max} fast genau denselben Wert berechnet wie wir, trotzdem andere numerische Werte bei ihm beträchtlich von unseren abweichen.

2) P. Weiß u. G. Foëx, Journ. d. Phys. (5) 1. S. 805. 1911. Tab. 14. Die Autoren haben sich dort versehen. Die Werte von N , das unserem g entspricht, müssen eine Zeile tiefer gesetzt werden, und oben in der Kolonne ist die Zahl 13090 hinzuzufügen.

2. *Dämpfungskonstante und Reibungsfaktor.* Ferner können wir aus ε die Dämpfungskonstante $\Delta = k/2J$ sowie den Reibungsfaktor k bestimmen. Jene ist dadurch definiert, daß ein aus der Ruhelage abgelenktes Magneton freie Schwingungen nach dem Gesetze $\vartheta = C e^{-\Delta t} \sin \sqrt{(2\pi n_0)^2 - \Delta^2} t$ ausführt, dieser gibt, mit der Winkelgeschwindigkeit multipliziert, direkt das Moment der Reibungskraft.

Nach Gleichung (13) ist

$$(104) \quad \Delta = \frac{k}{2J} = \pi n_0' \varepsilon,$$

so daß wir erhalten

$$\Delta = 5,04 \cdot 10^9 \frac{1}{\text{sec}}; \quad k = 3,72 \cdot 10^{-28} \text{ g cm}^2 \text{ sec}^{-1}.$$

3. *Die Eigenschwingungszahl.* Die wahre Eigenschwingungszahl n_0 steht mit der scheinbaren n_0' in der durch Gleichung (13) gegebenen Beziehung

$$(105) \quad n_0'^2 = n_0'^2 + \frac{g N M^2}{6\pi^2 J} = n_0'^2 (1 + g \kappa_0).$$

Die Konstante g des Weißschen Feldes ist von Weiß und Foëx¹⁾ durch magnetische Messungen oberhalb des Curieschen Punktes ermittelt worden, und zwar gelten die beiden Gleichungen

$$(106) \quad \begin{cases} \chi_m (T - \Theta) = C_m, \\ \Theta = C_m g d, \end{cases}$$

in denen χ_m die auf ein Mol bezogene Suszeptibilität, T die absolute Temperatur, Θ die des Curie-Punktes, d die Dichte des Materials bedeutet. So ergab sich

$$g = 13090,$$

also folgt

$$n_0 = 1,32 \cdot 10^{11}; \quad \lambda_0 = 2,27 \text{ mm}.$$

Die Eigenwellenlänge ist also viel kleiner als die scheinbare Eigenwellenlänge ($\lambda_0' = 243 \text{ mm}$). Das liegt am Vorhandensein des starken Weißschen Strukturfeldes $g M$ [vgl. Gleichung (10)].

4. *Das logarithmische Dekrement.* Das logarithmische Dekrement der Eigenschwingungen eines Magnetons ergibt sich aus der Beziehung

$$(107) \quad \delta = \frac{\Delta}{n_0}.$$

1) P. Weiß u. G. Foëx, a. a. O. S. 805. Unser g ist Weiß' N .

Da $\delta = 0,0381$ folgt, so ist die Einstellung ausgesprochen periodisch mit sehr geringer Dämpfung. Das erscheint auf den ersten Blick merkwürdig, da die Permeabilitätskurve (Fig. 20) den Charakter eines aperiodischen Vorgangs hat, erklärt sich aber wiederum durch das starke Strukturfeld. Seine Existenz ist nämlich nach Gleichung (13) einer Verminderung der Eigenschwingungszahl äquivalent, und wir wissen, daß eine solche Verminderung eine periodische Bewegung aperiodisch machen kann.

5. *Das molekulare Feld.* Nach Gleichung (2) ist das molekulare Feld

$$(108) \quad A = \frac{4\pi^2 n_0^2 J}{M}.$$

Ersetzen wir J durch Gleichung (103) und berücksichtigen, daß nach (102)

$$\frac{N_0 d M}{a} = N M = M_\infty$$

ist, und daß (105) praktisch mit $n_0^2 = n_0'^2 g \kappa_0$ identisch ist, da $g \kappa_0$ sehr groß gegen 1 ist, so erhalten wir

$$(109) \quad A = \frac{2}{3} g M_\infty,$$

d. h.

$$A = 4,55 \cdot 10^6 \text{ Gauss.}$$

Es mag wunderbar erscheinen, daß die Magnetonen bei so großen Molekularfeldern überhaupt durch äußere Felder merklich gerichtet werden können, jedoch ist zu bedenken, daß das kleinste Feld H bereits eine Magnetisierung M hervorruft und diese wieder ein Strukturfeld $g M$ in Richtung von H , so daß die richtende Feldstärke $K = H + g M$ ist, und dieser Wert kann allerdings den Wert von A leicht mehrfach übertreffen. Es sei übrigens bemerkt, daß aus paramagnetischen Beobachtungen Molekularfelder derselben Größenordnung sich ergeben.¹⁾

6. *Dimensionen des Magnetons.* Über die Form des Magnetons ist nichts Genauereres bekannt. Wir wissen, daß dasselbe keinesfalls eine Kugel sein kann, da diese diamagnetische

1) Vgl. R. Gans, Ann. d. Phys. 50. S. 163. 1916.

Erregung hervorrufen würde.¹⁾ Trotzdem können wir von einem mittleren Durchmesser D sprechen und

$$(110) \quad J = \frac{m}{10} D^2$$

setzen, unter m die Masse des Elementarmagneten verstanden. Dividieren wir beiderseits durch das magnetische Moment M des Magnetons und ersetzen J/M mittels Gleichung (108), so erhalten wir

$$(111) \quad D^2 = \frac{10 M}{m} \frac{A}{4\pi^2 n_0^2} = \frac{10 A}{4\pi^2 n_0^2} \frac{N M}{N m}.$$

$N M$ ist gleich M_∞ . Identifizieren wir die Elementarmagnete mit den Atomen, d. h. nehmen wir an, daß das Magneton mit dem Atom starr verbunden ist, was natürlich einigermaßen hypothetisch ist, so ist $N m = d$ die Dichte, so daß

$$(112) \quad D^2 = \frac{5}{2\pi^2} \frac{A M_\infty}{n_0^2 d}.$$

Daraus berechnet sich

$$D = 0,624 \cdot 10^{-6} \text{ mm},$$

eine Zahl, die durchaus von der Größenordnung ist, die nach anderen Methoden für die Molekulardimensionen gefunden worden ist.

La Plata, Instituto de Física. April 1919.

1) R. Gans, Gött. Nachr. 1910. S. 197; Ann. d. Phys. 49. S. 149. 1916.

(Eingegangen 16. August 1920.)

**2. Die Permeabilität des Nickels
für kurze Hertz'sche Wellen und die Messungen
von Arkadiew;
von Richard Gans.**

Im Begriffe, die von Loyarte und mir¹⁾ gemachte, längst fertige Arbeit abzusenden, erhalte ich endlich nach Jahren die *Annalen der Physik* und sehe, daß Arkadiew²⁾ neuerdings wieder die Permeabilität ferromagnetischer Materialien für schnelle Schwingungen bestimmt hat, und zwar durch Messung der Amplitudenabnahme elektrischer Wellen längs zweier parallelen Drähte.

Um unsere Beobachtungen mit den seinigen vergleichen sowie durch dieselben vervollständigen zu können, da er bis zu viel kleineren Wellen vorgedrungen ist, müssen wir uns zunächst einmal fragen, was die von Arkadiew sogenannte Permeabilität in Wirklichkeit bedeutet.

Dazu betrachten wir zeitlich ungedämpfte Sinuswellen, die sich längs der Drähte fortpflanzen, und deren Stromstärke j der Gleichung gehorcht³⁾

$$(1) \quad L_a \frac{\partial^2 j}{\partial t^2} = \frac{1}{C} \frac{\partial^2 j}{\partial z^2} - (w + \omega L_i i) \frac{\partial j}{\partial t}.$$

Hier bedeuten C , L_a , L_i und w bzw. die Kapazität, äußere, innere Selbstinduktion und Widerstand der Längeneinheit des Doppelleiters.

Setzen wir an

$$(2) \quad j = j_0 e^{i(\omega t - sz)},$$

so erhalten wir unter Berücksichtigung der Beziehung⁴⁾

1) R. Gans u. R. G. Loyarte, *Ann. d. Phys.* **64**, S. 209. 1921.

2) W. Arkadiew, *Ann. d. Phys.* (4) **58**, S. 105. 1919.

3) Vgl. R. Gans u. R. G. Loyarte, a. a. O. Gleichungen (68) u. (69), wenn man in (68) die fremde E.M.K. $E_f = 0$ setzt.

4) Vgl. E. Cohn, *Das elektromagnetische Feld*. Leipzig 1900. S. 472.

$$(3) \quad \frac{1}{CL_a} = c^2 = 9 \cdot 10^{20}$$

$$(4) \quad s^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - C(w + \omega L_i i) \omega i.$$

Ist $C(w + \omega L_i i) \omega$ klein gegen ω^2/c^2 , so ergibt sich

$$(5) \quad s = \frac{\omega}{c} \left\{ 1 + \frac{c^2}{2} CL_i - \frac{c^2}{2\omega} C w i \right\},$$

so daß die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Phasen

$$(6) \quad v = \frac{c}{1 + \frac{c^2}{2} CL_i}$$

wird, während die Amplituden nach dem Gesetze e^{-px} abnehmen, wo

$$(7) \quad p = \frac{c}{2} C w$$

ist.

Mißt man p und berechnet C aus Drahtradius a und Drähte-
abstand d nach der bekannten Formel

$$(8) \quad C = \frac{1}{4c^2 \ln \frac{d-a}{d}},$$

so kann man nach (7) w ermitteln.

Nun ist aber¹⁾

$$(9) \quad \frac{w^2}{4\pi n w_1} = \mu [\sqrt{1 + \gamma^2} + \gamma].$$

Es ist also von Arkadiew, der $\gamma = 0$ setzt, gerade das gemessen und als Permeabilität bezeichnet worden, was wir scheinbare Permeabilität μ^* genannt haben. Diese Größe ist eine Kombination der Permeabilität μ und der Größe²⁾

$$\gamma = \frac{2\varrho}{\mu n},$$

wo ϱ die magnetische Leitfähigkeit bedeutet.

Nun haben wir auf Grund der Molekulartheorie μ^* als Funktion von λ/λ_0' berechnet ($\lambda = c/n$ Wellenlänge; $\lambda_0' = 24,3$ cm scheinbare Eigenwellenlänge der Magnetonenschwingungen), indem wir als weitere Konstanten $4\pi\alpha_0 = 11,0$; $\varepsilon = 1,3$ angenommen haben (α_0 Anfangssuszeptibilität für $n = 0$;

1) R. Gans u. R. G. Loyarte, a. a. O. Formel (83) u. (54).

2) A. a. O. Formel (32).

$\pi n_0' \varepsilon$ Dämpfungskonstante der Magnetonenschwingungen) und haben die nachstehende Figur erhalten.¹⁾

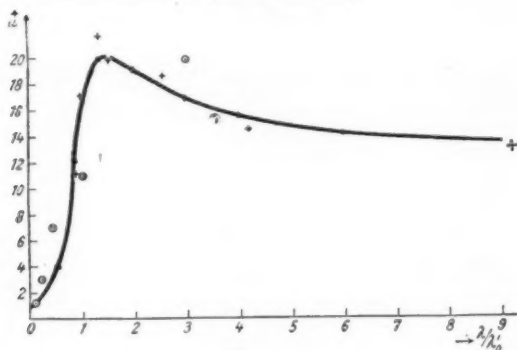


Fig. 1.

Die Kreuze in derselben bedeuten unsere Beobachtungswerte, die Kreise die Arkadiews (a. a. O. S. 136). Erinnern wir noch daran, daß unsere Werte für $\lambda = \infty$ und $\lambda = 5,44 \cdot 10^3 \text{ cm}$ auch auf der Kurve liegen, so kann man unsere Theorie und somit unsere numerischen Werte von μ und ϱ (Gans und Loyarte, Figg. 20 u. 22) als Funktionen der Wellenlänge als hinreichend bestätigt betrachten.

Würde man die Differenz der Phasengeschwindigkeit v gegenüber der Ausbreitungsgeschwindigkeit c im freien Raume genügend genau messen können, so ergäbe sich nach (6) L_t . Es ist aber²⁾

$$(10) \quad \frac{\pi n L_t^2}{w_1} = \mu [\sqrt{1 + \gamma^2} - \gamma].$$

Somit könnten wir aus (9) und (10) durch direkte Messungen μ und γ für jede Wellenlänge ermitteln, während wir aus (9) allein nur mittels Zuhilfenahme der Theorie diese beiden Größen einzeln bestimmt haben.

La Plata, Instituto de Fisica. 25. April 1920.

1) A. a. O. Fig. 20.

2) A. a. O. Formel (83) u. (54).

(Eingegangen 16. August 1920.)

3. Die Berechnung optischer und elektrostatischer Gitterpotentiale; von P. P. Ewald.

Inhalt: I. 1. Elektrostatische Potentiale. 2. Elektrodynamische Potentiale. 3. Ziel der Arbeit. — II. 1. Thetafunktionen einer Veränderlichen. Zusammenhang zwischen Thetafunktionen und Gitterproblemen. 2. Ableitung der Transformationsformel für Thetafunktionen von 3 Veränderlichen. — III. 1. Potentiale als Summen von Einzelwirkungen (randloser Kristall). 2. Potentialumformung, Trennungsstelle E . Gesamtpotential eines einfachen Gitters. 3. Erregendes Potential eines einfachen Gitters. 4. Gesamtes und erregendes Potential im zusammengesetzten Gitter, Strukturfaktor. — IV. 1. Übergang zu elektrostatischen Potentialen, dimensionslose Größen. 2. Beispiel: Gitterenergie von Steinsalz. 3. Beispiel: Gitterenergie von Flußspat.

I.

1. Bei den Untersuchungen über den Aufbau der Kristalle und ihre Eigenschaften tritt die Notwendigkeit auf, gewisse Potentiale nicht nur als allgemeinen Ausdruck zu kennen, sondern ihren Zahlenwert an irgendeiner Stelle des vom Gitter erfüllten Raumes zu ermitteln. Das elektrostatische Potential eines Ionengitters z. B. ist

$$(1) \quad \varphi(P) = \sum \frac{\varepsilon_{P'}}{R_{PP'}},$$

wo unter P' ein Atom des Gitterverbandes, unter $\varepsilon_{P'}$ seine Ladung, und unter $R_{PP'}$ sein Abstand vom Aufpunkt P verstanden ist und das Summenzeichen sich auf alle Atome P' bezieht. Dies Potential gibt die Arbeit an, die notwendig ist, um eine positive Einheitsladung (wir benutzen gewöhnliche elektrostatische Einheiten) aus dem Unendlichen an den Ort P zu bringen. Wünscht man die Energie zu kennen, die im ganzen Gitterverband aufgespeichert ist, so ist diese¹⁾

1) Vgl. etwa M. Born und A. Landé, Berl. Ber. 45. S. 1048 bis 1068. 1918.

$$(2) \quad A = \frac{1}{2} \sum_P \epsilon_P \varphi'(P) = \frac{1}{2} \sum_P \sum_{P'}' \frac{\epsilon_P \epsilon_{P'}}{R_{PP'}};$$

hierbei fällt der Ort P jetzt mit einem Gitteratom zusammen und der Beitrag $\epsilon_P \varphi'(P)$, den dieses Atom zum Gesamtpotential liefert, unterscheidet sich von dem obigen Ausdruck (1) durch die Berücksichtigung der Ladung ϵ_P statt 1 und dadurch, daß beim Hineinrücken des Aufpunkts P in den Gitterpunkt das unendlich werdende Glied aus der Summe (1) fortzulassen ist, das mit $R_{PP'} = 0$ entsteht. (Dies bedeutet der Akzent am Summenzeichen.) Die auf eine Grundzelle des Kristalls entfallende Energie erhält man, wenn der Punkt P nur die zu der Zelle gehörenden Atomlagen durchläuft. Um numerische Werte angeben zu können, sind die Koordinaten der Gitterpunkte zur Berechnung der $R_{PP'}$ zu verwenden, außerdem muß aber die Summe weitgehend umgeformt werden, damit ihre Konvergenz verbessert wird, die in der Form (2) sehr schlecht ist.

Derartige Berechnungen der Gitterenergie sind in der letzten Zeit wiederholt durchgeführt worden, nachdem E. Madelung¹⁾ eine Methode dafür angegeben und am Steinsalzgitter erprobt hat. Ich erwähne die Berechnung für den Gittertypus ZnS (Zinkblende) von M. Born und E. Bormann²⁾ und für CaF_2 (Flußspat) von A. Landé³⁾, die später von Frl. Bormann⁴⁾ berichtigt worden ist.

Gitterpotentiale, die sich nach (2) aus Potentialen des Typus

$$(3) \quad \varphi'(P) = \sum_{P'}' \frac{\epsilon_{P'}}{R_{PP'}}$$

zusammensetzen, sind erheblich schwieriger in eine geeignete schnell konvergente Gestalt zu bringen, als Potentiale des Typus (1), in denen der Aufpunkt nicht mit einem Gitterpunkt zusammenfällt. Das Madelungsche Verfahren bezieht sich gerade auf diesen Fall und besteht darin, das Potential des Gitters ohne den Aufpunkt aus dem Potential von Halb-

1) E. Madelung, Phys. Zeitschr. 19. S. 524. 1919.

2) M. Born u. E. Bormann, Ann. d. Physik 63. S. 218. 1920.

3) A. Landé, Verh. D. Phys. Ges. 20 S. 217. 1918.

4) E. Bormann, Zeitschr. f. Physik 1. 55. 1920.

geraden, Geraden und Ebenen zusammenzusetzen, die in regelmäßiger Weise gemäß der Gitterstruktur mit Atomen besetzt sind. Die Potentiale, die von diesen Elementen des Gesamtgitters stammen, lassen sich jeweils in schnellkonvergente Formen bringen, so daß die numerische Rechenarbeit gering wird. Eine der Hauptschwierigkeiten des Verfahrens besteht darin, den geometrischen Überblick über die Lage und Besetzung von Halbgeraden, Geraden und Ebenen nicht zu verlieren. In der Tat ist Herrn Landé durch Fortlassen einer Netzebene beim CaF_2 ein Fehler unterlaufen. Doch bedarf die Geometrie der Gitter ja stets — auch bei der unten anzugebenden Rechenweise — eingehenden Studiums.

2. *Elektrodynamische Potentiale* treten in der Kristalloptik auf. Sie sind charakterisiert durch Summen wie

$$(4) \quad \mathfrak{P}(P) = \sum_{P'} \frac{\tilde{p}_{P'} \left(t - \frac{R_{PP'}}{c} \right)}{R_{PP'}}.$$

Die Summe stellt das (vektorielle Hertzsche) Potential zur Zeit t im Aufpunkt P dar, hervorgebracht durch Einzelwirkungen, die von den Momenten $\tilde{p}_{P'}$ der Atome P' ausgehen. Gegenüber (1) besteht der wesentlichste Unterschied in dem Auftreten der „Retardierung“, d. h. das Moment $\tilde{p}_{P'}$ muß wegen der endlichen Ausbreitungsgeschwindigkeit der Felder mit dem Wert in Rechnung gesetzt werden, den es zur Zeit $\left(t - \frac{R_{PP'}}{c} \right)$ hatte.

In dem für die Optik wichtigsten Fall der Ausbreitung einer ebenen Welle im Kristall haben die Momente die Form¹⁾

$$(5) \quad \tilde{p}_{P'} = p_{P'} e^{-i\omega t + i(\mathbf{f} \mathbf{R}_{P'})},$$

\mathbf{f} heißt hierin der Ausbreitungsvektor der Welle. Er hat die Größe ω/q (ω die Frequenz, q die Phasengeschwindigkeit der Welle) und seine Richtung ist die der Wellennormalen. Denn das skalare Produkt $(\mathbf{f} \mathbf{R}_{P'})$, wo $\mathbf{R}_{P'}$ der Fahrstrahl zum Atom P' von einem beliebigen festen Anfangspunkt aus ist, hat auf den Ebenen senkrecht \mathbf{f} konstante Werte. — $p_{P'}$ ist die (vektorielle) maximale Amplitude des Momentes von P' .

1) Vgl. M. Born, *Dynamik d. Kristallgitter*. Leipzig, Teubner, 1915. (§ 23 und 24.)

Geht man mit dem Ansatz (5) in (4) ein, und zugleich durch Fortlassen des gemeinsamen zeitlichen Faktors $e^{-i\omega t}$ von \mathfrak{P} zur Amplitude \mathfrak{P} über, so ist der Typ eines optischen Potentials

$$(6) \quad \mathfrak{P}(P) = \sum p_{P'} \frac{e^{iK_0 R_{PP'}} + i(t\mathfrak{R}_{P'})}{R_{PP'}},$$

wo $K_0 = \frac{\omega}{c}$ die Ausbreitungskonstante des Einzelfeldes ist. Die Summe bezieht sich auf alle Atome P' und ist dadurch zu vereinfachen, daß alle Atome, die dem gleichen einfachen Translationsgitter angehören, in gleicher Weise schwingen, d. h. gleiches $p_{P'}$ haben. (So wie sie in den elektrostatischen Potentialen gleiche Ladung $\varepsilon_{P'}$ haben.)

Wir beschreiben nun das Gitter durch die drei „Achsenvektoren“ a_1, a_2, a_3 , die zusammen ein einfaches Translationsgitter mit den Punkten

$$(7) \quad \mathfrak{R}_i = l_1 a_1 + l_2 a_2 + l_3 a_3 = \sum l_i a_i \quad (i = 1, 2, 3, l_i \text{ ganzzahlig})$$

definieren, sowie durch die „Basis“, die T Atome enthalten möge und sich in gleicher durch T Fahrstrahlen r_i zu beschreibender Weise um jeden Gitterpunkt \mathfrak{R}_i wiederholt, so daß

$$(7') \quad \mathfrak{R}_{P'} = \mathfrak{R}_i + r_i = \sum l_i a_i + r_i.$$

Die analogen Punkte jeder Basisgruppe, d. h. solche mit gleichem r_i bilden zusammen ein einfaches Translationsgitter und wir können das Gesamtpotential (6) am Punkte $P = r$ so aufteilen:

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{P}(r) &= \sum_i p_i e^{i(t r_i)} \cdot \sum \frac{e^{iK_0 R_{PP'}} + i(t\mathfrak{R}_{P'})}{R_{PP'}} \\ &= \sum_i p_i e^{i(t r_i)} \cdot H(r - r_i). \end{aligned} \right.$$

Hierin ist H der skalare Anteil des von einem einfachen Translationsgitter herrührenden Vektorpotentials:

$$(9) \quad H(r) = \sum_i \frac{e^{iK_0 |\mathfrak{R}_i - r| + i(t\mathfrak{R}_i)}}{|\mathfrak{R}_i - r|}$$

und die Aufgabe ist auf die Berechnung der dreifach unendlichen Summe (9) reduziert. Sie entspricht dem elektrostatischen Potential (1) eines Translationsgitters mit der Ladung $\varepsilon = 1$, in welches sie formal übergeht, wenn K_0 und t verschwinden.

Wieder aber genügt für die Zwecke der Kristalloptik die Kenntnis von Π nicht, sondern es ist nötig, den Grenzwert des Potentials zu wissen, wenn der Aufpunkt r in einen Gitterpunkt \mathfrak{R}_i des Translationsgitters einrückt. Der von dem betr. Gitterpunkt selbst herrührende, wie $\frac{1}{|\mathfrak{R}_i - r|}$ unendlich werdende Anteil ist dabei fortzulassen. Wir nennen dies Potential mit dem in der Dispersionstheorie üblichen Namen „*erregendes Potential*“, weil aus ihm die Kraft gewonnen wird, welche das betr. Atom zu seinen Schwingungen erregt und schreiben es, indem wir das Fortlassen des Wertetripels $i' = (l_1', l_2', l_3')$ aus der Summe durch den Akzent andeuten,

$$(10) \quad \Pi_{i'}(r) = \sum_i \frac{e^{iK_0|\mathfrak{R}_i - r| + i(\mathfrak{f}\mathfrak{R}_i)}}{|\mathfrak{R}_i - r|}.$$

Da seine Ableitungen am Punkte $r = \mathfrak{R}_i'$ gebraucht werden, muß es, bevor zum $\lim (r = \mathfrak{R}_i')$ geschritten wird, auch für etwas abweichende Werte von r bekannt sein. Das erregende Potential entspricht genau dem elektrostatischen (3) eines Translationsgitters mit Einheitsladungen und geht mit $K_0 = f = 0$ in φ' über.

Wie bei φ' beruht auch hier die Schwierigkeit der Berechnung auf dem Auslassen des einen Gitterpunktes aus dem Gesamtpotential. Ich habe in meiner Dissertation¹⁾ eine Methode zur numerischen Rechnung angegeben, bei der nicht wie bei der Madelungschen das Potential aus einzelnen Elementen zusammengesetzt wird, sondern zunächst das Gesamtpotential Π [Gleichung (9)] gebildet und hiervon die Wirkung des einen Gitterpunktes abgezogen wird; daraufhin kann der Grenzübergang ausgeführt werden, der den Aufpunkt in den Gitterpunkt führt. Diese Methode, die auf der Transformationsformel der Thetafunktionen beruht, wurde seinerzeit benutzt, um für ein rhombisches Translationsgitter von gegebenem Achsenverhältnis die Doppelbrechung numerisch zu berechnen.

3. Die Wichtigkeit, welche die Berechnung der Kristallpotentiale gewonnen hat, veranlaßt mich, meine Berechnungsmethode in zweierlei Hinsicht zu erweitern. *Erstens* nämlich,

1) Dispersion und Doppelbrechung von Elektronengittern (Kristallen). München 1912; auch Ann. d. Phys. 49. S. 1. 1916.

sie auf *schiefwinklige Kristallgitter auszudehnen*. Dies schien zunächst einige Schwierigkeiten zu bereiten, weil Summen, die bei orthogonalem Gitter durch das Produkt von drei einfachen ϑ -Funktionen von je einer Variablen dargestellt werden, im allgemeinen Fall eine verwickelte ϑ -Funktion von drei Variablen geben. Es zeigt sich aber, daß bei geeigneter Bezeichnungsweise diese Schwierigkeiten in der Tat sehr gering sind. Es ist einer der zahlreichen Fälle von Kristallgitterrechnungen, in denen der Gebrauch von zwei zueinander reziproken Systemen von Achsenvektoren ungeheure Vereinfachungen für die Beschreibung und Auffassung der Formeln herbeiführt, ohne natürlich in mathematischer Hinsicht neues zu bieten. Nur unsrer Gewöhnung, fast alles in rechtwinkligen Koordinaten zu rechnen, ist es zuzuschreiben, daß das Hilfsmittel der reziproken Vektoren nicht viel allgemeiner in Gebrauch ist. Zwingen uns äußere Umstände, wie z. B. schiefwinklige Kristallgitter, zum Abweichen von dieser Übung, so sind reziproke Vektoren die angemessene und unvermeidliche Ausdrucksform.¹⁾

Die zweite Erweiterung gegenüber den in meiner Dissertation durchgeführten Betrachtungen ist der *Übergang auf elektrostatische Potentiale*, indem

$$K_0 = 0, \quad f = 0$$

gesetzt wird. Dieser Übergang ist natürlich nicht möglich für ein einzelnes Translationsgitter, sondern nur für solche zusammengesetzten Gitter, deren Basis neutral ist. Dann läßt er sich aber ohne Schwierigkeit ausführen und man er-

1) Man vergleiche C. Runge, Vektoranalysis. Leipzig, S. Hirzel, 1919. Sind a_1, a_2, a_3 drei Vektoren, so sind die zu ihnen reziproken b_1, b_2, b_3 definiert durch die sechs Gleichungen (wir benutzen die Bezeichnungen der Enzykl. d. math. Wiss.)

$$(a_i, b_i) = 1, \quad (a_i, b_x) = 0 \quad (i, x = 1, 2, 3, i \neq x).$$

Die a_i sind auch die reziproken zu den b_i . Ist A das von den a_i , B das von den b_i aufgespannte Volum,

$$A = (a_1 [a_2 a_3]), \quad B = (b_1 [b_2 b_3]), \quad B = 1/A,$$

so ist

$$b_1 = \frac{[a_2 a_3]}{A}, \dots; \quad a_1 = \frac{[b_2 b_3]}{B}, \dots \text{ u. zykl. Vert.}$$

Für jeden beliebigen Vektor gelten die identischen Darstellungen:

$$r = a_1 (b_1 r) + a_2 (b_2 r) + a_3 (b_3 r) = b_1 (a_1 r) + b_2 (a_2 r) + b_3 (a_3 r).$$

hält auf diese Weise aus den zur Berechnung elektrodynamischer Potentiale geeigneten Formeln solche für die elektrostatischen Potentiale, die an Bequemlichkeit der Handhabung den Madelung'schen Formeln nicht nachstehen dürften. Es wird von den Besonderheiten der Kristallstruktur und der persönlichen Vorliebe des Rechners abhängen, welche von beiden Methoden schneller zum Ziele führt. Jedenfalls dürfte es nicht unerwünscht sein, über zwei voneinander völlig unabhängige Rechnungsweisen zu verfügen.

II.

1. Unsere erste Aufgabe ist die Ableitung der Transformationsformel einer ϑ -Funktion von 3 Variablen in einer für unsere Zwecke übersichtlichen Form. Mathematisch neues bietet diese Formulierung nicht, welche übrigens durch Spezialisierung der sehr allgemeinen Transformationsformel in A. Krazers Lehrbuch der Thetafunktionen¹⁾ entnommen werden kann. Ihre Neuableitung in den geeigneten Bezeichnungen ist fast einfacher und setzt nur die wohlbekannte Transformationsformel für eine gewöhnliche ϑ -Funktion von einer Variablen und einem Periodenverhältnis voraus. Die dabei auftretende elementare vektorielle Umrechnung habe ich im Text unterdrückt und gebe dafür auf Anregung von Hrn. A. Sommerfeld in einer Anmerkung eine interessantere Ableitung.

Eine einfache ϑ -Funktion ist als Reihe bekanntlich definiert durch die Summe von Exponentialfunktionen, deren Exponent den Summenzeiger im zweiten Grade enthält. Letzterer heiße l und laufe von $-\infty$ bis $+\infty$. Indem man das einzelne Summenglied nach Fourier in eine Summe auflöst, und die Reihenfolge der Summationen vertauscht, erhält man eine Umformung der Summe, die als Transformationsformel bezeichnet wird.²⁾ Sie besagt im besonderen Falle die Identität folgender Summen:

1) Leipzig, Teubner, 1903, S. 108.

2) Der Physiker wird sich den Inhalt der Transformationsformel gern durch die *Wärmeleitung in einem Drahring* veranschaulichen:

Der Drahring (x von 0 bis 2π) besitze zur Zeit $t = 0$ einen Wärmepol von der Stärke 1 im Punkt $x = 0$. Gefragt ist nach der Temperaturverteilung zur Zeit t .

1. *Methode der Wärmepole (d'Alembertsche Lösung)*. Man denke sich den Drahring aufgeschnitten auf das Stück $-\pi$ bis $+\pi$ der x -Achse

$$(13) \sum_{-\infty}^{+\infty} l e^{-\tau(l+g)^2 + 2(l+g)u} = \sqrt{\frac{\pi}{\tau}} e^{\frac{u^2}{\tau}} \sum_{-\infty}^{+\infty} l e^{-\frac{\pi^2}{\tau} l^2 - 2\pi i l \left(\frac{u}{\tau} - g\right)}.$$

Als Wurzelwert ist dabei derjenige zu nehmen, dessen reeller Teil positiv ist. u heißt das Argument, τ der Modul der ϑ -Funktion und g ist ein Teil der Charakteristik $\left[\begin{smallmatrix} g \\ 0 \end{smallmatrix}\right]$. Doch ist ein Eingehen auf die Bedeutung dieser Größen für die Periodi-

gelegt. Eine in diesem Abschnitt periodische Lösung mit einem Wärmepol im Punkte $x=0$ erhält man durch sukzessive Spiegelung, d. h. Belegung der x -Achse mit Einheitspolen in den Punkten $x=2\pi l$ (l ganzzahlig). Das Abklingen der Temperatur von einem Einheitspol nach Ort und Zeit geschieht nach der Funktion

$$u = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{e^{-\frac{\xi^2}{4t}}}{\sqrt{t}} \quad (\xi = \text{Abstand vom Pol}).$$

Also ist die gesuchte Temperaturverteilung im Ring

$$U_1 = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{(2\pi l - x)^2}{4t}}}{\sqrt{t}} = \frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{2\sqrt{\pi}\sqrt{t}} \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi^2 l^2 \frac{1}{t} + \pi l \frac{x}{t}}.$$

2. *Methode der Fourierentwicklung.* Die gesuchte Temperaturverteilung muß die räumliche Periode 2π haben, also die Fourierentwicklung

$$U = \sum_{-\infty}^{+\infty} A_l e^{ilx} \quad (A = F u(t)).$$

Damit die Differentialgleichung der Wärmeleitung $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{\partial U}{\partial t}$ befriedigt ist, muß sein

$$-l^2 A_l = \frac{\partial A_l}{\partial t}, \quad A_l = a_l e^{-l^2 t}, \quad (a_l = \text{konst.}).$$

Der Anfangszustand für $t=0$ (U = Zackenfunktion Z vom Inhalt 1 im Punkt $x=0$) verlangt

$$a_l = \frac{1}{2\pi} \int Z(\xi) e^{-il\xi} d\xi = \frac{1}{2\pi}.$$

Daher ist

$$U_2 = \frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{-l^2 t + ilx}.$$

Der Vergleich von U_1 und U_2 gibt die obige Formel für $g=0$, $u=ix/2$, $t=\tau$ (vgl. H. v. Helmholtz, Vorlesungen Bd. VI. S. 142).

zitätseigenschaften der ϑ -Funktionen im folgenden nicht erforderlich, da uns allein die Gleichheit der beiden Reihen interessiert. Nur soviel sei an dieser Stelle über den Zusammenhang zwischen ϑ -Funktionen und Kristallgittern bemerkt: Die ϑ -Funktion von einem komplexen Argument u teilt bekanntlich die u -Ebene in Periodenparallelogramme, in denen sich der Wert der Funktion bis auf einen Faktor wiederholt. Ebenso wird der $2p$ -dimensionale Raum, in dem sich die p komplexen Veränderlichen einer Funktion von p Argumenten bewegen, in ein Zellsystem von Periodenparallelotopen aufgeteilt, in denen die Funktionswerte sich bis auf einfache Faktoren wiederholen. Der Quotient zweier ϑ mit gleichem Periodensystem ist eine $2p$ -fach streng periodische Funktion, und es gilt der Satz, daß jede $2p$ -fach periodische Funktion sich durch solche ϑ -Quotienten darstellen läßt. Die Kristallgitterpotentiale (1) bzw. (9) sind nun 3-fach periodische bzw. bis auf einen einfachen Faktor periodische Funktionen. Ihre Periodizität im Reellen wird sich als Ausschnitt aus dem R^{VI} der Argumente einer ϑ -Funktion von 3 komplexen Variablen darstellen lassen. Die Bearbeitung der Charakteristikentheorie der mehrfachen ϑ im Hinblick auf die Bedürfnisse der Kristallgitterrechnungen würde gewiß manchen beachtenswerten Zusammenhang zutage fördern, der einen auf funktionentheoretischer Basis beruhenden direkten Ausdruck solcher Potentiale gestatten würde.

2. Betrachten wir nun eine ϑ -Funktion von 3 Argumenten, die wir uns in kurzer Schreibweise durch folgende Reihe geben:

$$(14) \quad \Theta = \sum_{l_1 l_2 l_3}^{\infty \dots \infty} e^{-q_l^2 + i(q_l \cdot v)}.$$

Hierin sind q_l und v Vektoren, $(q_l \cdot v)$ ihr skalares Produkt. q_l ist so definiert: es seien b_1, b_2, b_3 drei beliebige Vektoren, l_1, l_2, l_3 drei ganze Zahlen und $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ drei Parameter. Dann soll sein:

$$(15) \quad q_l = (l_1 + \alpha_1)b_1 + (l_2 + \alpha_2)b_2 + (l_3 + \alpha_3)b_3 = \sum (l_i + \alpha_i)b_i.$$

Denken wir uns mit den Vektoren b_i das Translationsgitter hergestellt, so ist q_l der Fahrstrahl zu einem Gitterpunkt dieses Gitters vom Punkt $\cdot - \mathfrak{A} = - \sum \alpha_i b_i$ aus, $q_l^2 = (q_l, q_l)$ das

Quadrat seiner Länge. Die Summe bezieht sich auf sämtliche Gitterpunkte des b_i -Gitters.

Der Exponent eines e -Termes lautet in ausgeschriebener Form

$$(16) \quad E = - \sum_i \sum_n (l_i + \alpha_i)(l_n + \alpha_n)(b_i b_n) + i \sum_i (l_i + \alpha_i)(b_i v).^{1)}$$

Nur im Fall, daß die b_i ein orthogonales Vektorensystem bilden, reduziert sich der erste quadratische Term auf die Summe von drei Quadraten. Dies bedeutet, daß die Funktion Θ in das Produkt von drei einfachen ϑ -Funktionen der Form (13) zerfällt, in denen $\frac{i}{2}(b_i v)$ die Argumente sind. Dieser Fall findet sich bei Kristallen mit orthogonalen Achsensystem verwirklicht und ist der früher von mir untersuchte.

Die Konvergenz der Summe (14) ist gesichert, wenn die Größen b_i, α_i reell sind und mithin q_i der reelle Fahrstrahl ist, wie oben beschrieben. Nichts hindert jedoch die vorstehenden Größen als komplex anzusehen, solange die Summen konvergent bleiben.

Man kann nun die Summe (14) umformen, indem man die Gleichheit (13) schrittweise auf die Summen nach l_1, l_2, l_3 anwendet. Nach einer elementaren, aber in ihrem Verlauf nicht sehr übersichtlichen Rechnung, bei der sich frühzeitige Einführung der zu den b_i reziproken c_i empfiehlt, gelangt man zu folgender Transformationsformel²⁾:

1) Es wird kaum zu Verwechslungen Anlaß geben können, daß i sowohl als Index, wie als imaginäre Einheit auftritt. In der Bezeichnungsweise von Krazer (S. 30/31) wäre, wie der Vergleich der dortigen Formeln mit (16) zeigt, $\Theta = \vartheta \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \end{bmatrix} ([(b v)])_{(b_i b_n)}$.

2) Eleganter und übersichtlicher als auf dem oben angegebenen Wege läßt sich die Transformationsformel der dreifachen Theta wie folgt begründen, — ich verdanke den Hinweis darauf Hrn. A. Sommerfeld, der seinerzeit den Zusammenhang von Thetafunktionen und Wärmeleitungsproblemen als Thema zum Habilitationsvortrag eingereicht hatte.

Es sei eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung

$$(a) \quad \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0$$

aufzustellen, die in dem aus drei Vektoren a_1, a_2, a_3 gebildeten parallelepipedischen Grundbereich periodisch sein soll und zur Zeit $t = 0$ im Punkt mit dem Fahrstrahl \mathfrak{B} einen Wärmepol hat. Allgemeine Sätze

Bestimmen 3 Vektoren $\mathfrak{d}_1 \mathfrak{d}_2 \mathfrak{d}_3$ zusammen mit einem vierten \mathfrak{A} und 3 Summenzeigern l_1, l_2, l_3 einen „Summationsvektor“

$$(15) \quad \mathfrak{a}_l = l_1 \mathfrak{d}_1 + l_2 \mathfrak{d}_2 + l_3 \mathfrak{d}_3 + \mathfrak{A};$$

besagen die Eindeutigkeit der Lösung und wir können, indem die Lösung in zwei Formen aufgestellt wird, durch Vergleich die gewünschte Transformationsformel entnehmen.

Die *d'Alembertsche Lösung* dieses Problems wird erhalten, indem mit den Vektoren \mathfrak{a}_l ein Gitter errichtet wird, dessen Gitterpunkte die Fahrstrahlen

$$(b) \quad \mathfrak{R}_l = l_1 \mathfrak{a}_1 + l_2 \mathfrak{a}_2 + l_3 \mathfrak{a}_3 \quad (l = \text{Indextripel!})$$

haben. Man setzt nun zur Zeit $t = 0$ in alle Punkte $\mathfrak{R}_l + \mathfrak{B}$ einen Einheitspol ein, der bekanntlich eine Temperaturverteilung

$$u = \frac{1}{\pi^{3/2}} \frac{1}{(4t)^{3/2}} e^{-\frac{R^2}{4t}}$$

erzeugt, wo R der Abstand Pol-Aufpunkt ist. Indem man $R^2 = (\mathfrak{R}_l + \mathfrak{B} - \mathfrak{r})^2$ einsetzt, wird die gesuchte Lösung für den Aufpunkt \mathfrak{r} :

$$(c) \quad U = \frac{1}{\pi^{3/2}} \frac{1}{(4t)^{3/2}} \sum_l e^{-\frac{1}{4t}(\mathfrak{R}_l + \mathfrak{B} - \mathfrak{r})^2}.$$

Andererseits stelle man die Lösung nach *Fourier* her. Sie hat die Form

$$(d) \quad U = \sum A_l e^{2\pi i(\mathfrak{h}_l \mathfrak{r})},$$

wobei die „Fouriervektoren“ $2\pi \mathfrak{h}_l$ durch die zu den \mathfrak{a}_l reziproken Achsen \mathfrak{b}_l bestimmt sind:

$$(e) \quad 2\pi \mathfrak{h}_l = 2\pi(l_1 \mathfrak{b}_1 + l_2 \mathfrak{b}_2 + l_3 \mathfrak{b}_3).$$

Denn nur so läßt sich erreichen, daß alle Summenglieder in (d) ihren Wert beibehalten, wenn \mathfrak{r} um $\{n_1 \mathfrak{a}_1 + n_2 \mathfrak{a}_2 + n_3 \mathfrak{a}_3\}$ (n_i ganzzahlig) vermehrt wird. Die Koeffizienten A_l sind Funktionen von l und t und zunächst so zu bestimmen, daß die Differentialgleichung (a) befriedigt wird. Nun ist bekanntlich das Resultat der Operation Δ , angewandt auf eines der Glieder von (d) (dies hat dieselbe räumliche Abhängigkeit wie eine ebene Welle vom Ausbreitungsvektor $2\pi \mathfrak{h}_l$) nichts anderes als ein Faktor $-(2\pi \mathfrak{h}_l)^2$, der zum Glied hinzutritt. Wir erhalten somit aus (a) für A_l :

$$\frac{\partial A_l}{\partial t} \cdot e^{2\pi i(\mathfrak{h}_l \mathfrak{r})} + A_l 4\pi^2 \mathfrak{h}_l^2 e^{2\pi i(\mathfrak{h}_l \mathfrak{r})} = 0,$$

$$(f) \quad \text{integriert:} \quad A_l = C_l e^{-4\pi^2 \mathfrak{h}_l^2 \cdot t}.$$

Der Faktor C_l , der noch von l abhängen kann, ist aus der Anfangsbedingung zu bestimmen, daß für $t = 0$, $U = 0$ bis auf den Punkt $\mathfrak{r} = \mathfrak{B}$, wo U mit dem Inhalt 1 unendlich wird („Zackenfunktion“). Nun bestimmt sich der Koeffizient C_l des Gliedes $e^{2\pi i(\mathfrak{h}_l \mathfrak{r})}$ in der Fourierentwicklung einer Funktion $Z(\mathfrak{r})$ bekanntlich so:

$$(g) \quad C_l = \frac{1}{v_a} \int Z(\mathfrak{r}) e^{-2\pi i(\mathfrak{h}_l \mathfrak{r})} d\mathfrak{r}.$$

sind ferner c_i die zu den b_i reziproken Vektoren, v_d der von den b_i aufgespannte Rauminhalt und p_i ein zweiter Summationsvektor:

$$(17) \quad p_i = \pi(l_1 c_1 + l_2 c_2 + l_3 c_3),$$

so gilt für jedes Argument v die Gleichheit:

$$(18) \quad \sum_{l_1, l_2, l_3}^{\infty \dots + \infty} e^{-q_i^2 + i(q_i, v)} = \frac{\pi^{3/2}}{v_d} \sum_{l_1, l_2, l_3}^{\infty \dots + \infty} e^{-\left(p_i - \frac{v}{2}\right)^2 + 2i(p_i, v)}.$$

Das Integral rechter Hand ist dabei über alle Punkte r des Entwicklungsbereiches zu erstrecken, v_d ist der Inhalt dieses Bereichs. Im Fall unserer „Zackenfunktion“ ergibt sich:

$$(h) \quad C_l = \frac{1}{v_d} \int e^{-2\pi i(b_l, r)}.$$

Somit lautet die Fouriersche Lösung unseres Problems:

$$(i) \quad U = \frac{1}{v_d} \sum_t e^{-4\pi^2 b_l^2 t + 2\pi i(b_l, r - \mathfrak{B})}.$$

Der Vergleich der beiden Lösungen (c) und (i) liefert die Transformationsformel der Thetafunktion. Um sie klar hervortreten zu lassen, schaffen wir die Variable t fort, indem wir setzen: $\frac{a_l}{2\sqrt{t}} = b_l$. Dementsprechend wird, wenn c_l die zu den b_l reziproken Vektoren sind, $c_l = 2\sqrt{t}b_l$; führen wir

$$\mathfrak{D}_l = \frac{\Re_l}{2\sqrt{t}}, \quad \Re = \frac{\mathfrak{B}}{2\sqrt{t}}, \quad v = \frac{r}{2\sqrt{t}}, \quad \mathfrak{P}_l = 2\sqrt{t}b_l$$

ein, so behalten die drei ersten Größen ihre Bedeutung von Fahrstrahlen im primären, die letzte als Fahrstrahl im reziproken Gitter bei, nur daß als ersteres das zeitlich variable Gitter aus den b_l zugrunde liegt. Nennen wir schließlich v_d das aus den b_l gebildete Volumen, so ist:

$$v_d = \frac{1}{(2\sqrt{t})^{3/2}} v_{d_1}.$$

Der Vergleich von (c) und (i) ergibt nun:

$$\frac{1}{\pi^{3/2}} \sum_l e^{-(\mathfrak{D}_l + \Re - v)^2} = \frac{1}{v_d} \sum_l e^{-(\pi \mathfrak{P}_l)^2 + 2\pi i(\mathfrak{P}_l, v - \Re)}$$

oder auch:

$$\sum_l e^{-(\mathfrak{D}_l + \Re)^2 + 2(\mathfrak{D}_l + \Re, v)} = \frac{\pi^{3/2}}{v_d} \sum_l e^{-(\pi \mathfrak{P}_l - iv)^2 - 2\pi i(\mathfrak{P}_l, \Re)}.$$

Ersetzen wir hierin schließlich noch v durch $i\frac{v}{2}$, $\mathfrak{D}_l + \Re$ durch q_l und $\pi \mathfrak{P}_l$ durch p_l , so ergibt sich die in Gleichung (18) des Textes ausgesprochene Transformation.

Die vektorielle, invariante Schreibweise der Exponenten ist bei Transformationen in den Bezugsachsen oder in den Summenzeigern sehr bequem, wovon man sich bei den Rechnungen an Steinsalz bzw. Flußspat überzeugen möge.

III.

1. Bevor wir die eigentliche Summierung der in (3) bzw. (4) aufgeschriebenen Einzelwirkungen in Angriff nehmen, müssen wir fragen, von welcher Art die Konvergenz dieser Summen ist. Die Notwendigkeit, sich mit dieser Frage zu befassen, erhellt daraus, daß eine Summe von Termen, die wie $1/R$ abnehmen, über ein allseits unbegrenztes Kristallgitter erstreckt, unmöglich konvergieren kann, es sei denn, daß positive und negative Faktoren der Terme eine geeignete Vernichtung der Einzelbestandteile bewirken. Aber auch dann kommt es auf die Reihenfolge der Summierung — allgemein auf die Summationsvorschrift — an, durch die erst einer von beliebig vielen errechenbaren Werten als der physikalisch richtige Summenwert herausgehoben wird. Beim endlichen Gitterstück treten derartige Unbestimmtheiten nicht auf und man könnte ihnen aus dem Wege gehen, wenn man einen aus endlich vielen Zellen bestehenden Kristall betrachten würde. Man würde aber hiermit eine sehr große Komplikation der Verhältnisse in Kauf nehmen, die aus der Ungleichwertigkeit der Zellen je nach ihrer Lage gegen den Rand hervorgeht: die reine Periodizität, das hervorstechende Merkmal des Kristalls, wäre in den Formeln verdeckt. Dabei ist es einleuchtend, daß die physikalisch wichtigen Erscheinungen aufgeteilt werden können in Volum- oder Materialeigenschaften, die wesentlich von der inneren Struktur, und in Oberflächen-(Rand-)erscheinungen, die vom Vorhandensein der Berandung herrühren. Letztere interessieren uns hier nicht, da es zunächst auf die Berechnung der Materialeigenschaften ankommt.¹⁾

1) Ich möchte hier auf das von mir über die optischen Potentiale (Ann. d. Phys. 49. S. 11 u. 12. 1916) gesagte verweisen, um mich nicht zu wiederholen. Man vergleiche dazu die Behandlung durch C. W. Oseen, Ann. d. Phys. 48. S. 1—56. 1915, insbesondere § 2, auch bei R. Lundblad, Untersuchungen über die Optik d. disperg. Medien, Uppsala Univ Årsskrift 1920, besonders III, 2.

Die Summationsvorschrift, durch die im folgenden die Materialeigenschaften herausgeschält werden, ohne daß die Periodizität im Kristall verdeckt würde, besteht in folgendem: es wird zunächst der Wert der Summen aufgesucht, der entstehen würde, wenn die Momente bzw. Ladungen der Atome in großer Entfernung vom Aufpunkt exponentiell abnehmen würden. Anstatt ε/R wird

$$\varepsilon \frac{e^{-K'R}}{R}, \text{ statt } \varepsilon \frac{e^{iK_0 R}}{R} \text{ wird } \varepsilon \frac{e^{iK_0 R - K'R}}{R}$$

summiert, in beiden Fällen also Glieder, die wie $e^{iK_0 R}$ abnehmen, wo K_0 einen positiv imaginären Anteil besitzt. Dieser Anteil selbst darf beliebig klein sein, so daß in endlicher Entfernung vom Aufpunkt nur unmerkliche Abänderungen des wirklichen Zustandes entstehen. Doch genügt er, um die absolute Konvergenz der Summen zu erzwingen. Der Kristall schwimmt sozusagen in großen Entfernungen, ohne je plötzlich abzubrechen. Alle Eigenschaften, die wir als Materialeigenschaften bezeichnen, d. h. solche, die aus einer gewissen beschränkten Umgebung stammen und sich deshalb unabhängig von der Begrenzung an allen gleichwertigen Punkten eines Kristallgitters wiederfinden, müssen aus diesem *randlos aufgehenden Kristall* berechenbar sein. Für sie ist der physikalisch richtige Wert der Summen derjenige, der in der Grenze für verschwindenden Imaginärteil von K_0 hervorgeht.

2. Zur Auswertung des Potentials (9) bedienen wir uns der folgenden Darstellung der zu summierenden Einzelwirkungen:

Sei für den Augenblick $R = |\mathfrak{R}_l - \mathfrak{r}|$ die Entfernung eines Atoms vom Aufpunkt, so ist

$$(20) \quad \frac{e^{iK_0 R}}{R} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-R^2 \varepsilon^2 + \frac{K_0^2}{4\varepsilon^2}} d\varepsilon.$$

Der Integrationsweg erstreckt sich von 0 bis ∞ , muß aber aus dem Punkt 0 derart herausgeführt werden, daß der

(20') reelle Teil von $\frac{K_0^2}{4\epsilon^2}$ für kleine ϵ negativ

ist, etwa auf dem Wege von Fig. 1. Auf die Ableitung dieser Integraldarstellung gehe ich hier nicht ein, sondern verweise auf meine Dissertation.

Setzen wir die Darstellung in (9) ein, so wird das Potential:

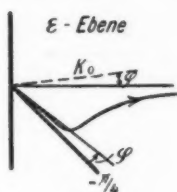


Fig. 1.

$$(21) \quad \Pi(r) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \sum_{(i)} e^{-(\mathfrak{R}_i - r)^2 \epsilon^2 + i(\mathfrak{I} \mathfrak{R}_i) + \frac{K_0^2}{4\epsilon^2}} d\epsilon.$$

Reihenfolge von Integration und Summation durften hierbei vertauscht werden; letztere bezieht sich auf alle Gitterpunkte \mathfrak{R}_i des einfachen Translationsgitters,

$$(7) \quad \mathfrak{R}_i = l_1 a_1 + l_2 a_2 + l_3 a_3.$$

Die Funktion unter dem Integral ist eine \mathcal{G} -Funktion von 3 durch die Lage des Aufpunktes r bestimmten Argumenten, auf die wir nunmehr die Transformationsformel (18) anwenden wollen. Wir vergleichen mit den auf der rechten Seite dieser Formel vorkommenden Bezeichnungen, indem wir setzen:

$$\frac{v}{2} = r\epsilon; \quad p_i = \pi \sum l_i c_i = \epsilon \mathfrak{R}_i = \epsilon \sum l_i a_i;$$

mithin

$$c_i = \frac{\epsilon}{\pi} a_i,$$

$$2\pi \alpha_i = (\mathfrak{f} a_i), \quad |D| = \frac{1}{|C|} = \frac{\pi^3}{\epsilon^3} \frac{1}{V}, \quad \text{wo } V = (a_1 [a_2 a_3])$$

das Elementarvolumen des Atomgitters ist.

Hiernach ergeben sich für die in (18) links stehenden Größen folgende Werte, wenn mit b_i die zu den Gitterachsen a_i reziproken Vektoren bezeichnet werden:

$$b_i = \frac{\pi}{\epsilon} b_i; \quad q_i = \sum \left(l_i + \frac{(\mathfrak{f} a_i)}{2\pi} \right) \frac{\pi}{\epsilon} b_i.$$

Beachtet man, daß

$$\sum b_i (\mathfrak{f} a_i) \equiv \mathfrak{f};$$

und führt weiter den bei allen Kristallgitterrechnungen auftretenden *Fahrstrahl im reziproken Gitter*

$$(22) \quad b_i = l_1 b_1 + l_2 b_2 + l_3 b_3$$

ein, dessen Richtung mit der Normale jener Gitterebene zusammenfällt, deren Millersche Indizes $\{l_1 l_2 l_3\}$ sind¹⁾; so läßt sich schreiben

$$q_l = \frac{1}{2\varepsilon} (2\pi h_l + f).$$

Wir erhalten so die mit (21) äquivalente Darstellung

$$(23) \quad H(r) = \frac{2\pi}{V} \int \sum_{(l)} e^{- (2\pi h_l + f) \frac{1}{4\varepsilon^2} + i(2\pi h_l + f, r) + \frac{K_0^2}{4\varepsilon^2} \frac{d\varepsilon}{\varepsilon^3}},$$

oder indem noch eingeführt wird

$$(22') \quad \mathfrak{R}_l = 2\pi h_l + f :$$

$$(23') \quad H(r) = \frac{2\pi}{V} \int \sum_{(l)} \frac{e^{- (\mathfrak{R}_l^2 - K_0^2) \frac{1}{4\varepsilon^2} + i(\mathfrak{R}_l, r)}}{\mathfrak{R}_l^2 - K_0^2} \frac{d\varepsilon}{\varepsilon^3}.$$

Die Summation bezieht sich diesmal darauf, daß der Fahrstrahl h_l alle Punkte des reziproken Gitters durchläuft. Der Vektor \mathfrak{R}_l ist das 2π -fache desjenigen Fahrstrahls zum Punkte l ($= l_1, l_2, l_3$) des reziproken Gitters, der vom Anfangspunkt $\left(-\frac{f}{2\pi}\right)$ aus gezogen wird.

Es sei betont, daß die Gleichheit der Integranden in (21) und (23) für jeden Wert von ε gilt, für den die Summen konvergieren — und das ist dank (20') auf dem ganzen Integrations-

1) Definition der Millerschen Indizes $h_1 h_2 h_3$: die Ebene schneidet die Achsenrichtungen in den Punkten

$$\frac{a_1}{h_1}, \frac{a_2}{h_2}, \frac{a_3}{h_3},$$

vgl. Fig. 2. Daher Normalenrichtung der Ebene gegeben durch das Vektorprodukt aus 2 Seiten:

$$\left[\frac{a_2}{h_2} - \frac{a_1}{h_1}, \frac{a_3}{h_3} - \frac{a_1}{h_1} \right] \\ = \frac{1}{h_2 h_3} [a_2 a_3] + \frac{1}{h_1 h_2} [a_1 a_2] + \frac{1}{h_1 h_3} [a_1 a_3] = \frac{(a_1 [a_2 a_3])}{h_1 h_2 h_3} \cdot h.$$

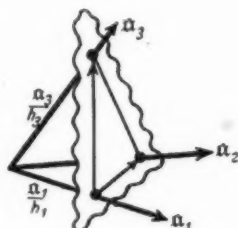


Fig. 2.

weg der Fall.¹⁾ Es ist also erlaubt, bei einer gewissen Stelle E der Integration eine, von da ab die andere Darstellung zu gebrauchen. Hierin liegt die Verwertung der Formeln zur numerischen Rechnung. In Formel (21) ist die Konvergenz der Reihe bei großen ε gut, während sie bei kleinen ε schlecht ist infolge der Kleinheit von K_0 , das zur Berechnung der elektrostatischen Potentiale sogar gegen 0 gehen soll. Umgekehrt aber ist die Konvergenz der Summe in (23) für große ε schlecht, für kleine ε auch bei $K_0 = 0$ gut.

Beide Darstellungen ergänzen sich und man wird zur numerischen Rechnung geeignete Formeln erhalten, wenn für kleine Werte von ε (23), für große ε (21) benutzt wird, indem eine Trennungsstelle $\varepsilon = E$ auf dem Integrationsweg eingeführt wird, bei der die eine Darstellung zugunsten der anderen verlassen wird:

$$(24) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Pi = \Pi^{(1)} + \Pi^{(2)}, \\ \Pi^{(1)} = \frac{2\pi}{V} \int_{(0)}^E \sum e^{-\Re_l^2 \frac{1}{4\varepsilon^2} + \frac{K_0^2}{4\varepsilon^2} + i(\Re_l, \tau)} \frac{d\varepsilon}{\varepsilon^3}, \\ \Pi^{(2)} = \frac{2}{V\pi} \int_E^\infty \sum e^{-(\Re_l - \tau)^2 \varepsilon^2 + i(\tau \Re_l) + \frac{K_0^2}{4\varepsilon^2}} d\varepsilon. \end{array} \right.$$

Die Integration in $\Pi^{(1)}$ läßt sich allgemein ausführen, da

$$\int_{(0)}^E e^{-\frac{A}{4\varepsilon^2}} \frac{d\varepsilon}{\varepsilon^3} = \frac{2}{A} e^{-\frac{A}{4E^2}}$$

ist, wenn der Integrand auf dem betr. Wege für $\varepsilon = 0$ verschwindet. Also ist:

$$(25) \quad \Pi^{(1)} = \frac{4\pi}{V} \sum e^{-\frac{(\Re_l^2 - K_0^2)}{4E^2} + i(\Re_l, \tau)} \frac{1}{\Re_l^2 - K_0^2}.$$

1) Mit Ausschluß des Grenzpunktes $\varepsilon = 0$ in (21) und $\varepsilon = \infty$ in (23). Man überzeugt sich jedoch, daß der Ausschluß der Grenzpunkte auf dem Integrationsweg den Wert weder des Einzelintegrals (20) noch der Summe Π ändert, solange sie überhaupt endlich ist, dank den Faktoren $e^{-\frac{K_0^2}{4\varepsilon^2}}$ und $\frac{1}{\varepsilon^3}$ in (21) bzw. (23).

Wählen wir insbesondere $E = \infty$, sodaß $\Pi^{(1)}$ unser gesamtes Potential darstellt, so erhalten wir die bekannte *Fourierdarstellung des Potentials*

$$(25') \quad \Pi = \frac{4\pi}{V} \sum \frac{e^{i(\mathbf{R}_i \cdot \mathbf{r})}}{\mathbf{R}_i^2 - K_0^2},$$

deren Identität mit der z. B. von Born in seinem Buche (II, § 25) gegebenen Fourierentwicklung unschwer eingesehen wird. Das einzelne Summenglied in (25') stellt in Verbindung mit dem zeitlichen Periodizitätsfaktor $e^{-i\omega t}$ eine ebene Welle vom Ausbreitungsvektor \mathbf{R}_i dar, deren Amplitude um so größer ist, je mehr sich die Größe von \mathbf{R}_i der Ausbreitungskonstante $K_0 = \frac{\omega}{c}$ im leeren Raume nähert.¹⁾

Die \mathcal{F} -Transformationsformel (18) vermittelt also den gleichen Übergang wie diejenige für ein Argument beim Problem der Wärmeleitung im Ringe: von der „d'Alembertschen“²⁾ zur Fourierschen Darstellung, vom Aufbau aus Quellen zum Aufbau aus Eigenfunktionen. Da jede Fourierentwicklung, deren Gültigkeitsbereich ein gewisses, durch 3 Vektoren α_i festgelegtes Parallelepipèd ist, nach den Fahrstrahlen \mathbf{h} zu den Punkten des zugehörigen reziproken Gitters fortschreitet³⁾, so ist das Auftreten der reziproken Vektoren in der Transformationsformel (18) kein Zufall, sondern steht in unmittelbarem Zusammenhang mit dieser Eigentümlichkeit der \mathcal{F} , das Bindeglied zwischen der d'Alembertschen und der Fourierschen Lösung zu sein.

3. Wichtiger für die meisten Zwecke und schwieriger zu berechnen als das Gesamtpotential (9) ist das erregende Po-

1) Die sog. Kugelkonstruktion der Theorie der Röntgeninterferenzen ist die geometrische Veranschaulichung des Potentials (25'). Vgl. Phys. Zeitschr. 14. S. 465, 1913 oder meine Habilitationsschrift Ann. d. Phys. 54. S. 519. 1917.

2) Bei Wärmeleitungsproblemen hat Laplace als erster die Lösung als Integral über die Wirkungen von Quellen aufgestellt; Fourier kennt diese Bedeutung der mathematischen Form (vgl. Enzyklop. d. math. Wiss. V, 4, § 5 und 6). Jedoch darf die Lösung hier wohl nach d'Alembert benannt werden, der die entsprechende Behandlung bei der Saite durchgeführt hatte.

3) Vgl. Anm. zu S. 262.

tential (10), das durch Fortlassen des von einem Gitterpunkte P stammenden Einzelpotentials aus (9) entsteht:

$$(26) \quad \Pi'_P(r) = \Pi(r) - \frac{e^{iK_0|\Re_P - r| + i(1/\Re_P)}}{|\Re_P - r|}.$$

Die Integraldarstellung (20) gestattet, das Einzelpotential vom Gesamtpotential abzuziehen. $\Pi(r)$ in $\Pi^{(1)}$ und $\Pi^{(2)}$ nach (24) aufteilend und die Integration in (20) ebenfalls in die Teile $0 \dots E$, $E \dots \infty$ zerlegend, sehen wir, daß sich aus der Summe $\Pi^{(2)}$ das auf $\Re_L = \Re_P$ bezügliche Glied gerade forthebt — wie ja verständlich ist, da in $\Pi^{(2)}$ jedes Summenglied die Wirkung eines Atoms darstellt. Drücken wir das Fortlassen des Gliedes \Re_P bei der Summation durch das Zeichen $\sum_{(P)}$ aus.

An $\Pi^{(1)}$ hingegen ist das Integral

$$(27) \quad \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{(0)}^E e^{-(\Re_P - r)^2 \varepsilon^2 + \frac{K_0^2}{4\varepsilon^2}} d\varepsilon,$$

abzuziehen. Wird die wohlbekannte und tabulierte Fehlerfunktion¹⁾

$$(28) \quad \Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-x^2} dx$$

eingeführt, so läßt sich das Integral exakt durch sie ausdrücken, wie im Anhang gezeigt wird:

$$(29) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{(0)}^E e^{-(\Re_P - r)^2 \varepsilon^2 + \frac{K_0^2}{4\varepsilon^2}} d\varepsilon = i \frac{\sin K_0 |\Re_P - r|}{|\Re_P - r|} \\ & + \frac{1}{2|\Re_P - r|} \left\{ e^{iK_0 |\Re_P - r|} \Phi\left(|\Re_P - r| E + \frac{iK_0}{E}\right) \right. \\ & \quad \left. + e^{-iK_0 |\Re_P - r|} \Phi\left(|\Re_P - r| E - \frac{iK_0}{E}\right) \right\}. \end{aligned} \right.$$

Man hat demnach die folgenden streng gültigen Formeln für das erregende Potential:

1) Jahnke-Emde, Funktionentafeln, Teubner 1909.

$$\begin{aligned}
 \Pi'_P(\mathbf{r}) &= \Pi_P^{(1)}(\mathbf{r}) + \Pi_P^{(2)}(\mathbf{r}), \\
 \Pi_P^{(1)}(\mathbf{r}) &= \frac{4\pi}{v} \sum_l e^{-\left\{\Re_l^2 - K_0^2\right\} \frac{1}{4E^2} + i(\Re_l, \mathbf{r})} - i \frac{\sin K_0 |\Re_P - \mathbf{r}|}{|\Re_P - \mathbf{r}|} \\
 &\quad - \frac{1}{2|\Re_P - \mathbf{r}|} \left\{ e^{iK_0 |\Re_P - \mathbf{r}|} \Phi\left(|\Re_P - \mathbf{r}| E + \frac{iK_0}{E}\right) \right. \\
 &\quad \left. + e^{-iK_0 |\Re_P - \mathbf{r}|} \Phi\left(|\Re_P - \mathbf{r}| E - \frac{iK_0}{E}\right) \right\}, \\
 \Pi_P^{(2)}(\mathbf{r}) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_E^\infty \sum_{(l)} e^{-\left(\Re_l - \mathbf{r}\right)^2 \varepsilon^2 + i(\mathbf{r}, \Re_l) + \frac{K_0^2}{4\varepsilon^2}} d\varepsilon \\
 &= \sum_{(l)} \left\{ \frac{\cos K_0 |\Re_l - \mathbf{r}|}{|\Re_l - \mathbf{r}|} \right. \\
 &\quad - \frac{1}{2|\Re_l - \mathbf{r}|} \left[e^{iK_0 |\Re_l - \mathbf{r}|} \Phi\left(|\Re_l - \mathbf{r}| E + \frac{iK_0}{2E}\right) \right. \\
 &\quad \left. \left. + e^{-iK_0 |\Re_l - \mathbf{r}|} \cdot \Phi\left(|\Re_l - \mathbf{r}| E - \frac{iK_0}{2E}\right) \right] \right\} e^{i(\mathbf{r}, \Re_l)}.
 \end{aligned}
 \tag{30}$$

In $\Pi_P^{(2)}$ ist das Integral gemäß Formel (III) des Anhangs eingesetzt worden.

Was ist nun bezüglich der Konvergenz der Summen durch die Umformungen erreicht worden?

$\Pi_P^{(1)}$ ist offenbar sehr schnell konvergent, da die Summenglieder im wesentlichen abnehmen wie $\frac{1}{\Re_l^3} e^{-\frac{1}{4} \pi^2 \Re_l^2 \frac{1}{E^2}}$, wo \Re_l der Fahrstrahl im reziproken Gitter ist, über dessen Punkte summiert werden muß. (\Re_l ist nach (22') von der Größenordnung \Re_l). Je kleiner E , um so besser die Konvergenz von $\Pi_P^{(1)}$.

Bei $\Pi_P^{(2)}$ scheint zunächst gegenüber der ursprünglichen Gestalt kein Fortschritt erzielt, da hier wieder Größen von der Ordnung $\frac{\cos K \Re}{\Re}$ über die Gitterpunkte des Atomgitters zu summieren sind. Man sieht jedoch, daß dieser schlecht konvergente Teil der Summe sich heraushebt, sobald es bei größeren Werten der Entfernung $\Re = |\Re_l - \mathbf{r}|$ erlaubt ist, die Fehlerfunktion wie folgt anzunähern:

$$\Phi(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-x^2}}{x}.
 \tag{31}$$

Das einzelne Summenglied von $\Pi_P^{(2)}$ wird dann, indem der schlecht konvergierende Teil sich forthebt:

$$(32) \quad \frac{E}{V\pi} \cdot \frac{e^{-\left(\Re_l - r\right)^2 E^2 + \frac{K_0^2}{4E^2}}}{\left(\Re_l - r\right)^2 E^2 + \frac{K_0^2}{4E^2}} \cdot e^{i\left(\Im_l\right)}.$$

Dies heißt aber, daß die Summe in der gleichen Weise konvergiert wie $\Pi_P^{(1)}$, indem nämlich die Glieder abnehmen wie

$$\frac{1}{E\sqrt{\pi}} \frac{1}{\left(\Re_l - r\right)^2} e^{-\left(\Re_l - r\right)^2 E^2}.$$

$(\Re_l - r)$ ist der Fahrstrahl vom Aufpunkt zu den Punkten des Atomgitters. Die Konvergenz ist um so besser, je *größer* E .

Durch die Wahl der Übergangsstelle E haben wir es somit in der Hand, entweder die Reihen von $\Pi_P^{(1)}$ oder die von $\Pi_P^{(2)}$ zu beliebig schneller Konvergenz zu zwingen. Ein mittlerer Wert von E wird beide Reihen für die numerische Rechnung geeignet machen.

4. Handelt es sich nicht um das erregende, sondern um das *Gesamtpotential*, welches in einem Aufpunkt P zu bilden ist, der nicht mit einem Gitterpunkt zusammenfällt, so ist in $\Pi^{(2)}$ das vorher fortgelassene Glied mitzunehmen und in $\Pi^{(1)}$ fallen die abzuziehenden Terme fort.

Es ist also, indem wieder in $\Pi^{(1)}$ die Summe über das reziproke, in $\Pi^{(2)}$ über das Atomgitter erstreckt wird:

$$(33) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Pi(r) = \Pi^{(1)}(r) + \Pi^{(2)}(r), \\ \Pi^{(1)}(r) = \frac{4\pi}{V} \sum \frac{e^{-\left\{\Re_l^2 - K_0^2\right\} \frac{1}{4E^2} + i\left(\Im_l, r\right)}}{\Re_l - K_0^2}, \\ \Pi^{(2)}(r) = \sum \left[\frac{\cos K_0 R_{lP}}{R_{lP}} - \frac{1}{2R_{lP}} \left\{ e^{iK_0 R_{lP}} \Phi\left(R_{lP}E + \frac{iK_0}{2E}\right) \right. \right. \\ \quad \left. \left. + e^{-iK_0 R_{lP}} \Phi\left(R_{lP}E - \frac{iK_0}{2E}\right) \right\} \right] e^{i\left(\Im_l\right)}, \\ R_{lP} = |\Re_l - r|. \end{array} \right.$$

Wenn nun das ganze Gitter aus mehreren (T) Translationsgittern besteht, so ist nach (7) und (8), sowie (33)

$$(34) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{P}(r) = \sum_i \mathfrak{p}_i e^{i\left(\Im_i\right)} \left\{ \Pi^{(1)}(r - r_i) + \Pi^{(2)}(r - r_i) \right\} \\ \quad = \mathfrak{P}^{(1)}(r) + \mathfrak{P}^{(2)}(r). \end{array} \right.$$

In $\Pi^{(2)}$ ist die Summe jetzt über alle Gitterpunkte, also über l und t zu erstrecken und der erste Bestandteil läßt sich übersichtlicher unter Einführung des Strukturfaktors¹⁾

$$(35) \quad \mathfrak{S}_l = \sum_t p_t e^{-2\pi i (\mathfrak{h}_l, \mathbf{r}_t)}$$

schreiben:

$$(36) \quad \mathfrak{P}^{(1)}(\mathbf{r}) = \sum_l \mathfrak{S}_l \frac{e^{-\left\{ \mathfrak{R}_l^2 - K_0^2 \right\} \frac{1}{4E^2} + i(\mathfrak{R}_l, \mathbf{r})}}{\mathfrak{R}_l^2 - K_0^2}.$$

Die Bedeutung von \mathfrak{S}_l zeigt sich, wenn $E = \infty$ gesetzt wird und sich das Potential auf $\mathfrak{P}^{(1)}$ reduziert: \mathfrak{S}_l ist das gesamte Moment, mit dem die Basisgruppe an der Aussendung derjenigen ebenen Welle beteiligt ist, die durch das l^{te} Summenglied dargestellt wird. Diese Welle entsteht nach der Kugelkonstruktion aus der „einfallenden“ Welle mit der Normalen \mathfrak{f} durch „Reflexion“ an der Ebene mit der Normalen \mathfrak{h}_l . Der im Strukturfaktor auftretende Phasenfaktor $(\mathfrak{h}_l, \mathbf{r})$ berücksichtigt das Heraustreten der einzelnen Atome der Basisgruppe aus der reflektierenden Ebene.

Schließlich sei noch angedeutet, daß auch im zusammengesetzten Gitter das erregende Potential für ein Atom P in zwei Teile zerlegt wird:

$$\mathfrak{P}_P(\mathbf{r}) = \mathfrak{P}_P^{(1)}(\mathbf{r}) + \mathfrak{P}_P^{(2)}(\mathbf{r}),$$

die leicht aus (20) und (35) aufzuschreiben sind.

Hiermit brechen wir die Betrachtungen für das optische Potential ab, das nicht selbst, sondern dessen räumliche Ableitungen in der Optik Gegenstand der Berechnung sind. Diese Ableitungen können an den angegebenen Reihen gliedweise gebildet werden, während z. B. zweimalige gliedweise Differentiation der Fourierdarstellung (25') nicht erlaubt ist, da sie zu nicht konvergenten Reihen führt. Die absolut konvergenten Darstellungen, die durch die Umformung gewonnen sind, stellen somit auch in dieser Hinsicht einen Fortschritt dar.

1) In der Theorie der Röntgeninterferenzen sind die Momente p_t gleichgerichtet; es tritt deshalb in der üblichen Definition des Strukturfaktors der vektorielle Charakter nicht hervor.

IV.

1. Der Grenzübergang von den optischen zu den elektrostatischen Potentialen, der durch Verschwindenlassen von \mathfrak{f} und K_0 und Ersetzen des Momentes \mathfrak{p} durch die Ladung ε geschieht, ist natürlich nur möglich, wenn die Basisgruppe neutral ist. Indem wir das Gitter gemäß Gl. (7), (7') in einfache Translationsgitter (Index t) zerlegt denken, sprechen wir diese Bedingung so aus:

$$(37) \quad \sum \varepsilon_t = 0 \quad t = 1, 2, \dots, T.$$

Das Gesamtpotential an irgend einem Aufpunkt \mathbf{r} , der nicht mit einem Gitterpunkt zusammenfällt, wird aus (33) bis (36) erhalten, wenn dort $K_0 = \mathfrak{f} = 0$ gesetzt wird. Hierbei geht \mathfrak{R}_t in $2\pi \mathfrak{h}_t$ über. Es wird:

$$(38) \quad \left\{ \begin{aligned} \Pi(\mathbf{r}) &= \Pi^{(1)}(\mathbf{r}) + \Pi^{(2)}(\mathbf{r}), \\ \Pi^{(1)}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{\pi V} \sum_t S_t \frac{e^{-\frac{\pi^2}{E^2} \mathfrak{h}_t^2 + 2\pi i (\mathfrak{h}_t \mathbf{r})}}{\mathfrak{h}_t^2}; \\ \Pi^{(2)}(\mathbf{r}) &= \sum_t \sum_l \varepsilon_t \frac{1 - \Phi(R_{ltP} E)}{R_{ltP}}; \end{aligned} \right. \quad S_t = \sum_l \varepsilon_l e^{-2\pi i (\mathfrak{h}_l \mathbf{r}_l)}, \quad R_{ltP} = |\mathfrak{R}_l + \mathbf{r}_l - \mathbf{r}|.$$

Das unendlich werdende Glied in $\Pi^{(1)}$ für $\mathfrak{h}_t = 0$ fällt wegen (37) fort, da der Strukturfaktor S_t Null wird. Übrigens hat, da es sich um ein skalares Potential handelt, der Strukturfaktor den Vektorcharakter eingebüßt. Beide Reihen konvergieren sehr gut.

Indem wir uns wieder dem für einen Gitterpunkt $\mathfrak{R}_l + \mathbf{r}_l$ geltenden *erregenden Potential* zuwenden, ist bei $\Pi^{(2)}$ das eine durch die Kombination (l' , t') gekennzeichnete Glied fortzulassen, wie an der Summe angedeutet werden möge.¹ Der von $\Pi^{(1)}$ abzuziehende Betrag wird aus (30) erhalten. Sonach ist:

$$(39) \quad \left\{ \begin{aligned} \Pi_{l't'}(\mathbf{r}) &= \Pi_{l't'}^{(1)}(\mathbf{r}) + \Pi_{l't'}^{(2)}(\mathbf{r}), \\ \Pi_{l't'}^{(1)}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{\pi V} \sum_t S_t \frac{e^{-\frac{\pi^2}{E^2} \mathfrak{h}_t^2 + 2\pi i (\mathfrak{h}_t \mathbf{r})}}{\mathfrak{h}_t^2} - \varepsilon_{l't'} \frac{\Phi(E \mathfrak{R}_{l't'P})}{R_{l't'P}}, \\ \Pi_{l't'}^{(2)}(\mathbf{r}) &= \sum_{l \neq l'} \sum_{t \neq t'} \varepsilon_{lt} \frac{1 - \Phi(E \mathfrak{R}_{ltP})}{\mathfrak{R}_{ltP}}. \end{aligned} \right. \quad \left\{ \begin{aligned} S_t &= \sum_{l'} \varepsilon_l e^{-2\pi i (\mathfrak{h}_l \mathbf{r}_l)}, \\ \mathfrak{R}_{ltP} &= |\mathfrak{R}_l + \mathbf{r}_l - \mathbf{r}|. \end{aligned} \right.$$

Schließlich erhält man hieraus den Faktor φ' , Gl. (3), der gesamten beim Gitteraufbau gegen das Ion l' , t' geleisteten Arbeit, indem man $r = \Re_{l'} + r_{l'}$ werden läßt. Offenbar muß für alle Ionen des gleichen Translationsgitters t' derselbe Wert entstehen und wir dürfen $l' = (000)$ setzen. Es wird dann, da $\lim \frac{\Phi(x)}{x} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}$ ist, aus (39)

$$(40) \quad \left\{ \begin{aligned} \varphi'_{l'} &= \varphi^{(1)}_{l'} + \varphi^{(2)}_{l'}, \\ \varphi^{(1)}_{l'} &= \frac{1}{\pi V} \sum_t S_{lt'} \frac{e^{-\frac{\pi^2}{E^2} \eta_{lt'}}}{\eta_{lt'}^2} - \varepsilon_{l'} \frac{2E}{\sqrt{\pi}}; \\ S_{lt'} &= \sum_i \varepsilon_i e^{2\pi i (\eta_{lt'} \tau_{lt'} - \tau_{lt'})}, \\ \varphi^{(2)}_{l'} &= \sum_{t \neq (0t')} \varepsilon_t \frac{1 - \Phi(E R_{ltt'})}{R_{ltt'}}; \quad R_{ltt'} = |\Re_{lt} + r_t - r_{l'}|. \end{aligned} \right.$$

Am Summenzeichen für $\varphi^{(1)}_{l'}$ ist durch den Akzent daran erinnert, daß das Glied $\eta_{lt}^2 = 0$ fortfällt.

Diese in Strenge gültigen Formeln für die elektrostatischen Potentiale bilden einfache geschlossene Ausdrücke und haben den Vorteil, daß die höheren Summenglieder sehr schnell abnehmen. Die Trennungsstelle E , von deren Wert die Summe $\varphi^{(1)} + \varphi^{(2)}$ nicht abhängen kann, gibt der Formel eine gewisse Geschmeidigkeit, die noch eine Anpassung je nach dem speziellen zu berechnenden Gitter gestattet. Vergrößerung von E bedeutet Ersparnis von Gliedern in $\varphi^{(2)}$, Verkleinerung Ersparnis bei $\varphi^{(1)}$. Es ist übrigens zu beachten, daß E die Dimension einer reziproken Länge hat, wie die Integrationsvariable ε in (20), aus der es entstanden ist.

Um die Formel in den Dimensionen übersichtlicher zu schreiben, setzen wir $E = \eta/\delta$, indem unter δ irgend eine Längendimension des Kristallgitters verstanden wird. Dann wird

$$(40') \quad \left\{ \begin{aligned} \varphi'_{l'} &= \frac{\delta^2}{\pi V} \sum_{t, i} S_{lt'} \frac{e^{-\frac{\pi^2}{\eta^2} \eta_{lt'}^2 \delta}}{\eta_{lt'}^2 \delta^2} - \frac{\varepsilon_{l'}}{\delta} \frac{2\eta}{\sqrt{\pi}}; \\ S_{lt'} &= \sum_i \varepsilon_i e^{2\pi i (\eta_{lt'} \tau_{lt'} - \tau_{lt'})}, \\ \varphi^{(2)}_{l'} &= \frac{1}{\delta} \sum_{t \neq (0t')} \varepsilon_t \frac{1 - \Phi\left(\eta \frac{R_{ltt'}}{\delta}\right)}{R_{ltt'} |\delta|}. \end{aligned} \right.$$

2. *Gitterenergie von Steinsalz.* Die Auswertung der obigen Formeln mag am Steinsalz und Flußspatgitter erläutert werden, deren Energien durch die Berechnungen von Madelung bzw. Landé-Bormann bekannt sind. Wir beschränken uns im Text auf die notwendigsten Erläuterungen.

Na^+ und Cl^- bilden je ein flächenzentriertes Gitter von der Würfelkante a .¹⁾ Wir wählen $\delta = a$. Achsen a_i siehe Fig. 3a, zugehöriges Volum

$$V = \frac{a^3}{4}; \quad r_{\text{Na}} = 0, \quad r_{\text{Cl}} = \frac{1}{2}(a_1 + a_2 + a_3).$$

Reziproke Achsen b_i (vgl. Fig. 3b) ergeben für den Endpunkt von b_i alle Punkte eines körperzentrierten Gitters von der Würfelkante $2/a$. Der Strukturfaktor ist

$$S_{l, \text{Na}} = \varepsilon (1 - e^{\pi i (l_1 + l_2 + l_3)}) = \begin{cases} 0 & \text{für } \sum l_i \text{ gerade} \\ 2\varepsilon & \text{für } \sum l_i \text{ ungerade.} \end{cases}$$

1) Die Geometrie der 3 Bravais'schen kubischen Gitter und ihrer Reziproken gestaltet sich folgendermaßen:

1. *Gewöhnliches kubisches Gitter.* Länge der Würfelkante a . 3 orthogonale Achsen a_i beschreiben das Gitter als Translationsgitter. $V = a^3$. Die reziproken Vektoren b_i fallen der Richtung und dem Sinn nach mit den a_i zusammen, ihre Länge $1/a$, das von ihnen aufgespannte Volumen $B = 1/a^3$.

2. *Flächenzentriertes kubisches Gitter.* Als Translationsgitter beschrieben durch $a_i =$ halben Flächendiagonalen des Grundwürfels. $|a_i| = a/\sqrt{2}$. Da das Gitter auch aufgefaßt werden kann als bestehend aus 4 einfachen kubischen Gittern, ist $V = \frac{1}{4}a^3$. Die b_i fallen in die Richtung der Würfelkörperdiagonalen,

$$|b_i| = \frac{\sqrt{3}}{a}, \quad B = \frac{4}{a^3},$$

3. Fig. 3.

3. *Körperzentriertes kubisches Gitter*
 $a_i =$ halbe Körperdiagonalen,

$$|a_i| = a \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad V = \frac{a^3}{2};$$

die a -Achsen haben also die gleiche Lage, wie bei 2. die b -Achsen. Daher müssen diesmal die b -Achsen die Richtung der Flächendiagonalen haben, das eingeschlossene Volum ist $B = 2/a^3$, ihre Länge daher $\frac{\sqrt{2}}{a}$.

Betrachtet man die ganzen von den a_i und b_i gebildeten Gitter, so findet sich folgende Zuordnung, welche die obigen Tatsachen anders ausspricht:

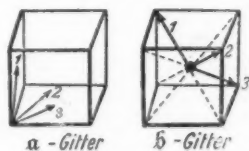


Fig. 3.

Von den Gitterpunkten liefert also die Hälfte keinen Beitrag. Die übrigbleibenden Gitterpunkte sind diejenigen des „körperzentrierenden“ Gitters, die insgesamt ein einfaches kubisches Gitter von der Kante $2/a$ bilden, in dem jedoch der Fahrstrahl h_i vom Zentrum eines Elementarwürfels aus zu zählen ist:

$$h_i^2 = \{(H_1 - 1/2)^2 + (H_2 - 1/2)^2 + (H_3 - 1/2)^2\} \cdot 4/a^2 \\ = 1/a^2 \sum (2H_i - 1)^2.$$

H_i sind wieder ganze Zahlen (die mit den l_i durch die gleiche Substitution zusammenhängen, welche die Achsen a_i in die orthogonalen Achsen des einfachen kubischen Gitters überführt. Vgl. bei Flußspat den Übergang zu orthogonalen Achsen durch Substitution statt geometrisch am Gitter ausgeführt).

Abstand $R_{iNa}^2 = \sum (l_i \frac{a}{2})^2$; Ladung $\epsilon_i = \begin{cases} +\epsilon & \text{für } \sum l_i \text{ gerade} \\ -\epsilon & \text{für } \sum l_i \text{ ungerade.} \end{cases}$

$$(41) \quad \begin{cases} \varphi_{Na}^{(1)} = \frac{\epsilon}{a} \left\{ \frac{4}{\pi} \sum 2 \cdot \frac{e^{-\frac{\pi^2}{\eta^2} \sum (2H_i - 1)^2}}{\sum (2H_i - 1)^2} - \frac{2\eta}{\sqrt{\pi}} \right\} \\ \varphi_{Na}^{(2)} = \frac{\epsilon}{a} \sum (-1)^{\sum l_i} \frac{1 - \Phi(\eta/2 \sqrt{\sum l_i^2})}{1/2 \sqrt{\sum l_i^2}}. \end{cases}$$

Erste numerische Berechnung: Wir wählen die Übergangsstelle η so, daß in beiden Reihen $\varphi^{(1)}$ und $\varphi^{(2)}$ die Summenglieder asymptotisch gleich schnell abnehmen. Wegen (31) gibt dies für große Werte der Summenzeiger:

$$\frac{4\pi^2}{\eta^2} = \frac{\eta^2}{4}, \quad \eta = 2\sqrt{\pi}.$$

Atomgitter.

1. Gewöhnliches kubisches Gitter, Würfelkante a .
2. Flächenzentriertes kub. Gitter, Würfelkante a .
3. Körperzentriertes kub. Gitter, Würfelkante a .

Reziprokes Gitter.

- Gewöhnliches kubisches Gitter, Würfelkante $1/a$.
- Körperzentriertes kub. Gitter, Würfelkante $2/a$.
- Flächenzentriertes kub. Gitter, Würfelkante $2/a$.

Ein *Translationsgitter* (einerlei ob Atomgitter oder reziprokes) mit Achsen $2c_i$ enthält die Punkte $R = l_1 c_1 + l_2 c_2 + l_3 c_3$, wo die l_i alle geraden Zahlen durchlaufen. Durch *Körperzentrierung* dieses Gitters entsteht ein Gitter, in dem die l_i nur die „ungemischten“ Tripel durchlaufen, d. h. die l_i entweder alle gerade oder alle ungerade sind. Durch *Flächenzentrierung* des gewöhnlichen kubischen wird den l_i die Bedingung $\sum l_i = \text{gerade Zahl}$ auferlegt.

Also Rechenformeln:

$$(41') \quad \begin{cases} q_{Na}^{(1)} = \frac{\varepsilon}{a} \cdot 2 \left\{ \sum \frac{e^{-\pi/4 \sum (2H_i - 1)^2}}{\pi/4 \sum (2H_i - 1)^2} - 2 \right\} \\ q_{Na}^{(2)} = \frac{\varepsilon}{a} 2\sqrt{\pi} \sum (-1)^{\sum l_i} \frac{1 - \Phi \sqrt{\pi(l_1^2 + l_2^2 + l_3^2)}}{\sqrt{\pi(l_1^2 + l_2^2 + l_3^2)}} \end{cases}$$

Zur numerischen Rechnung tragen wir in die erste Spalte der Tabellen die Wertetripel der Indizes ein, in die zweite die Anzahl Glieder, die sich unter Berücksichtigung von Vertauschungen und Vorzeichenwechsel daraus bilden lassen. Die Bedeutung der weiteren Spalten erhellt genügend aus den Überschriften.

| $q_{Na}^{(1)}$ | $(2H_i - 1)$ | Anzahl | $\sum (2H_i - 1)^2$ | Argum. | $e^{-\text{Arg.}}$ | $\frac{e^{-\text{Arg.}}}{\text{Argum.}}$ Anz. |
|----------------|--------------|--------|---------------------|--------|--------------------|---|
| | 111 | 8 | 3 | 2,356 | 0,09500 | 0,3226 |
| | 113 | 24 | 11 | 8,639 | 0,00018 | 0,0005 |
| | 133 | 24 | 19 | 14,91 | — | — |
| | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | — | — |
| | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | — | — |
| | | | | | | 0,3231 |

$$\frac{a}{\varepsilon} q^{(1)} = -2 \cdot 1,677 = -3,3538.$$

| $q_{Na}^{(2)}$ | l_i | $(\pm) \cdot \text{Anzahl}$ | $\sum l_i^2$ | Argum. | $1 - \Phi$ | $(1 - \Phi) \frac{\text{Anzahl}}{\text{Argum.}}$ |
|----------------|-------|-----------------------------|--------------|--------|------------|--|
| | 001 | - 6 | 1 | 1,7725 | 0,0122 | - 0,0413 |
| | 011 | + 12 | 2 | 2,506 | 0,0004 | + 0,0019 |
| | 111 | - 8 | 3 | 3,065 | — | — |
| | 002 | + 6 | 4 | — | — | — |
| | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| | | | | | | - 0,0394 |

$$\frac{a}{\varepsilon} q_{Na}^{(2)} = -2\sqrt{\pi} \cdot 0,0394 = -0,1403$$

$$\frac{a}{\varepsilon} q_{Na} = -3,494(1)$$

Wie man sieht, konvergieren beide Reihen so stark, daß nur je zwei verschiedene Glieder berücksichtigt werden müssen, um die dritte Stelle hinter dem Komma noch mitzunehmen. Die gesamte beim Gitteraufbau zu leistende Arbeit ist, da $q_{Cl} = -q_{Na}$ und $\varepsilon_{Cl} = \varepsilon_{Na} = \varepsilon$:

$$1/2 (\varepsilon_{Na} q_{Na} + \varepsilon_{Cl} q_{Cl}) = \varepsilon q_{Na} = -\frac{\varepsilon^2}{a} \cdot 3,494(1).$$

Zweite numerische Berechnung: Die Übergangsstelle η soll so groß gewählt werden, daß nur $\varphi^{(1)}$ zu berücksichtigen ist. Das größte Glied in $\varphi^{(2)}$ ist

$$2(1 - \Phi(\eta/2))$$

und tritt sechsmal auf. $1 - \Phi(2,9)$ ist nach den Funktionentafeln $< 0,0005$, also ist für eine Rechengenauigkeit von drei Dezimalstellen die geforderte Kleinheit von $\varphi^{(2)}$ gewiß erreicht, wenn $\eta = 2\pi$ genommen wird:

$$(41'') \quad \varphi_{Na} = \varphi_{Na}^{(1)} = \frac{\varepsilon}{a} \left\{ \frac{2}{\pi} \sum \frac{e^{-\frac{1}{4} \sum (2H_i - 1)^2}}{1/4 \sum (2H_i - 1)^2} - 4\sqrt{\pi} \right\}.$$

| $(2H_i - 1)$ | Anzahl | $\sum (2H_i - 1)^2$ | Argum. | $e^{-\text{Arg.}}$ | $e^{-\text{Arg.}}$ | Anzahl Argum. |
|--------------|--------|---------------------|--------|--------------------|--------------------|------------------|
| 111 | 8 | 3 | 0,75 | 0,47237 | 5,03861 | |
| 113 | 24 | 11 | 2,75 | 0,06393 | 0,55777 | |
| 133 | 24 | 19 | 4,75 | 0,00865 | 0,04373 | |
| 115 | 24 | 27 | 6,75 | 0,00117 | 0,00556 | |
| 333 | 8 | | 8,75 | 0,00016 | 0,00087 | |
| 135 | 48 | 35 | ⋮ | ⋮ | ⋮ | |
| 117 | 24 | 51 | ⋮ | ⋮ | ⋮ | |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | |

$$\varphi_{Na} = \frac{\varepsilon}{a} \left\{ \frac{2}{\pi} \cdot 5,64654 - 4\sqrt{\pi} \right\}$$

$$= - \frac{\varepsilon}{a} \cdot 3,494(3).$$

5,64654

Die Übereinstimmung mit dem zuerst berechneten Werte ist auf mehr als 1 Promille erreicht. Von dem Madelungschen Wert 3,487(6) bemerkt man eine geringfügige Abweichung (2 Promille), die ich infolge der guten Übereinstimmung meiner beiden Werte und da meine Reihen noch schneller konvergieren, als die Madelungschen, für reell halten möchte.

Es sei übrigens darauf aufmerksam gemacht, daß die Ausführung der numerischen Berechnung für zwei verschiedene Übergangsstellen eine wirksame Kontrolle gegen alle Arten von Rechenfehlern (systematische und unsystematische) bildet. Ein Auslassen von Teilen der Summe (wie bei Hrn. Landés Flußpatrechnung) zeigt sich sofort in der Diskrepanz der beiden Werte, ebenso wie Fehler in der Bestimmung des Strukturfaktors. Eine analoge Kontrolle besteht beim Madelungschen Verfahren darin, daß die Berechnung zweimal durchgeführt wird, indem das Gitter nach verschiedenen

Gittergeraden und -ebenen aufgelöst wird. Doch scheint mir die Rechenarbeit für die Kontrollrechnung bei meinem Verfahren wesentlich geringer zu sein, da man von den gleichen geschlossenen Formeln ausgeht wie für die erste Rechnung.

3. *Gitterenergie von Flußspat* (CaF_2). Die Ionen Ca^{++} und $2 \cdot \text{F}^-$ bilden drei flächenzentrierte Gitter (Achsen a_i wie Fig. 3a).

$$r_{\text{Ca}} = 0, \quad r_{\text{F}_1} = + \frac{1}{4} (a_1 + a_2 + a_3), \quad r_{\text{F}_2} = - \frac{1}{4} (a_1 + a_2 + a_3).$$

Wir berechnen erst φ_{Ca}' , dann φ_{F}' , indem wir η so groß wählen, daß $\varphi^{(2)}$ vernachlässigt werden kann.

1. Potential der Calciumionen $\boxed{\varphi_{\text{Ca}}'}$.

Strukturfaktor:

$$S_{l_i, \text{Ca}} = \varepsilon \left(2 - e^{\frac{\pi i}{2} \sum l_i} - e^{-\frac{\pi i}{2} \sum l_i} \right) = 2\varepsilon \left(1 - \cos \frac{\pi}{2} \sum l_i \right),$$

$$= \begin{cases} 0 \\ 4\varepsilon \\ 2\varepsilon \end{cases} \text{ wenn } \sum l_i \equiv \begin{cases} 0 \\ 2 \pmod{4} \\ \pm 1 \end{cases}.$$

Als Länge δ wird, wie bei Steinsalz, die Würfelkante a gewählt. $V = \frac{1}{8} a^3$.

$$(42) \quad \begin{cases} \varphi_{\text{Ca}}^{(1)} = \frac{a^2 \varepsilon}{\pi V} \sum \begin{Bmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{Bmatrix} e^{-\frac{\pi^2}{\eta^2} h_l^2 a^2} - \frac{2\varepsilon}{a} \cdot \frac{2\eta}{\sqrt{\pi}}, \\ \varphi_{\text{Ca}}^{(2)} = \frac{1}{a} \sum \varepsilon_t \frac{1 - \Phi\left(\eta \frac{R_{ll'}}{a}\right)}{R_{ll'} / a}. \end{cases}$$

Bestimmung von η : Der kleinste Abstand zweier Ionen liegt zwischen Ca und F-Ion, seine Länge: $\frac{1}{4} a \sqrt{3}$. Jedes Ca hat acht solche Nachbarn. Mit $\eta = 2\pi$ ist der größte Beitrag zu $\varphi_{\text{Ca}}^{(2)} \dots \frac{\varepsilon}{a} 8 \cdot \frac{4}{\sqrt{3}} \left(1 - \Phi\left(\pi \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \right)$. Da $1 - \Phi\left(\pi \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \sim 0,0001$, ist dieser Beitrag etwa 0,0018 und kommt, wie der Gang der Rechnung zeigt, neben dem Gesamtwert von φ_{Ca}' nicht in Betracht. Festsetzung: $\eta = 2\pi$.

Einführung neuer Summenzeiger in $\varphi_{\text{Ca}}^{(1)}$ (geometrisch: Beziehung des aus den h_i (Fig. 3b) gebildeten reziproken Gitters auf neue, orthogonale Achsen, algebraisch: Transformation der quadratischen Form h_l^2 in eine Summe von Quadraten).

Es ist

$$h_l = \sum_i l_i b_i$$

$$h_l^2 = \sum_i \sum_{\kappa} l_i l_{\kappa} (b_i b_{\kappa}).$$

Fig. 3b wird entnommen:

$$b_i^2 = \frac{8}{a^2}, \quad (b_1 b_2) = (b_1 b_3) = (b_2 b_3) = -\frac{1}{a^2}.$$

Hiermit

$$\begin{aligned} h_i^2 &= \frac{1}{a^2} \{ 8(l_1^2 + l_2^2 + l_3^2) - 2l_1 l_2 - 2l_1 l_3 - 2l_2 l_3 \}, \\ &= \frac{1}{a^2} \{ (\sum l_i - 2l_1)^2 + (\sum l_i - 2l_2)^2 + (\sum l_i - 2l_3)^2 \}, \\ &= \frac{1}{a^2} \{ H_1^2 + H_2^2 + H_3^2 \}. \end{aligned}$$

Die neuen ganzzahligen Zeiger

$H_1 = \sum l_i - 2l_1$; $H_2 = \sum l_i - 2l_2$; $H_3 = \sum l_i - 2l_3$ sind die Endpunktskoordinaten des Fahrstrahls h_i bezogen auf gewöhnliche kubische Achsen. Daß h_i ein körperzentriertes Gitter durchläuft, zeigt sich darin, daß die H_i nur „ungemischte“ Wertetripel annehmen ($H_1 \equiv H_2 \equiv H_3 \equiv \sum l_i \pmod{2}$).

Strukturfaktor in H_i ausgedrückt: Da $\sum H_i = \sum l_i$ ist, folgt:

$$S_{H_i \text{ Ca}} = \begin{cases} 0 & \text{wenn } \sum H_i \equiv \begin{cases} 0 \\ 2 \end{cases} \pmod{4}, \\ 4e & \text{wenn } \sum H_i \equiv \begin{cases} 2 \\ 0 \end{cases} \pmod{4}. \end{cases}$$

Rechenformel für q_{Ca} aus (42):

$$(42') \quad q_{\text{Ca}} = \frac{e}{a} \frac{1}{\pi} \sum \begin{Bmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{Bmatrix} e^{-\frac{1}{4} \sum H_i^2} - \frac{2e}{a} 4\sqrt{\pi}.$$

2. Potential der Fluorionen $\boxed{q_F^{(1)}}$.

Strukturfaktor für Ionen F_1 und F_2 :

$$S_{l_i F_1} = -\varepsilon \left(1 - 2e^{\frac{\pi i}{2} \sum l_i} + e^{\pi i \sum l_i} \right);$$

$$= e^{\frac{\pi i}{2} \sum l_i} \cdot S_{l_i \text{ Ca}}$$

$$= e^{\frac{\pi i}{2} \sum H_i} \cdot S_{H_i \text{ Ca}}$$

$$S_{l_i F_2} = -\varepsilon \left(1 - 2e^{-\frac{\pi i}{2} \sum l_i} + e^{-\pi i \sum l_i} \right)$$

$$= e^{-\frac{\pi i}{2} \sum l_i} \cdot S_{l_i \text{ Ca}}$$

$$= e^{-\frac{\pi i}{2} \sum H_i} \cdot S_{H_i \text{ Ca}}.$$

Da $S_{H_i, Ca}$ eine gerade Funktion von $\sum H_i$ ist, fällt der imaginäre Teil der Potentiale von selbst fort. Man erhält als *Rechenformel*:

$$(43) \quad \varphi_{F_{1,2}}' = \frac{1}{a} \frac{1}{\pi} \sum e^{\pm \frac{\pi i}{2} \sum H_i} S_{H_i, Ca} \cdot \frac{e^{-\frac{1}{4} \sum H_i^2}}{\frac{1}{4} \sum H_i^2} + \frac{\varepsilon}{a} 4\sqrt{\pi}.$$

3. *Gitterenergie pro Gitterkubus a^3* . Wir erhalten mit den ursprünglichen Achsen a_i für die im Volum a^3 enthaltene Energie gemäß (2):

$$A = \frac{1}{2} \{ 2\varepsilon \varphi_{Ca}' - \varepsilon \varphi_{F_1}' - \varepsilon \varphi_{F_2}' \}.$$

Die im Würfel von der Kante a enthaltene Energie ist viermal so groß, also

$$(44) \quad \left\{ \begin{aligned} 4A &= 2\varepsilon \{ 2\varphi_{Ca}' - \varphi_{F_1}' - \varphi_{F_2}' \}, \\ &= \frac{2\varepsilon^2}{a} \frac{1}{\pi} \sum \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{matrix} \right\} \left\{ 2 - e^{\frac{\pi i}{2} \sum H_i} - e^{-\frac{\pi i}{2} \sum H_i} \right\} \\ &\quad \cdot \frac{e^{-\frac{1}{4} \sum H_i^2}}{\frac{1}{4} \sum H_i^2} - \frac{\varepsilon^2}{a} 48\sqrt{\pi}. \end{aligned} \right.$$

Der aus den beiden ersten Faktoren zusammengesetzte Strukturfaktor hat folgende Werte:

$$(44') \quad S = \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{matrix} \right\} \left\{ 2 - 2 \cos \frac{\pi}{2} \sum H_i \right\} = \begin{cases} 0 \\ 16 \\ 4 \end{cases} \text{ wenn } \sum H_i \equiv \begin{matrix} 0 \\ 2 \\ \pm 1 \end{matrix} \pmod{4}.$$

Nach dieser Formel erfolgt die *numerische Berechnung* (vgl. Tabelle auf folgender Seite):

Der numerische Faktor steht in guter Übereinstimmung (1 Proz.) mit dem von Frl. Bormann berechneten: 46,93.

Das Beispiel des Flußspatgitters zeigt besser als das des besonders einfachen Steinsalzgitters wie die Methode bei Kristallen mit verwickelter Struktur anzuwenden ist. Man behält die allgemeinen Formeln möglichst lange bei, indem man sie auf den besonderen Fall bezieht und gestaltet dadurch die numerische Rechnung kurz und gedrungen. Es scheint mir gegenüber der Madelung'schen Methode ein Vorzug zu sein, daß die Ermittlung der einzelnen Geraden- und Ebenenlagen und -abstände fortfällt. Notwendig ist nur die Kenntnis des kleinsten vorkommenden *Atomabstandes*, um danach die Tren-

| H_i | $\sum H_i^2$ | $\frac{1}{4} \sum H_i^2$ | S-Anzahl | $e^{-\text{Argum.}}$ | $e^{-\text{Arg.}} \frac{\text{S-Anzahl}}{\text{Argum.}}$ |
|-------|--------------|--------------------------|-----------|----------------------|--|
| 002 | 4 | 1 | 16·6 | 0,36788 | 35,317 |
| 004 | 16 | 4 | 0 | | |
| 006 | 36 ← | 9 | 16·(6+24) | 0,000123 | 0,007 |
| 022 | 8 | 2 | 0 | | |
| 024 | 20 | 5 | 16·24 | 0,006738 | 0,517 |
| 026 | 40 | 10 | 0 | | |
| 044 | 32 | 8 | 0 | | |
| 222 | 12 | 3 | 16·8 | 0,049787 | 2,125 |
| 224 | 24 | 6 | 0 | | |
| 226 | 44 | 11 | 16·24 | | |
| 244 | 36 ← | | | | |
| 444 | 48 | 12 | 0 | | 37,966 |
| 111 | 3 | 0,75 | 4·8 | 0,47237 | 20,154 |
| 113 | 11 | 2,75 | 4·24 | 0,063928 | 2,234 |
| 115 | 27 ← | 6,75 | 4·(24+8) | 0,001171 | 0,022 |
| 133 | 19 | 4,75 | 4·24 | 0,008652 | 0,175 |
| 135 | 35 | 8,75 | 4·48 | 0,000158 | 0,003 |
| 155 | 51 | — | | | |
| 333 | 27 ← | | | | |
| 355 | 43 | 10,75 | 4·24 | — | 22,588 |

$$4A = \frac{\varepsilon^2}{a} \left\{ \frac{2}{\pi} (37,966 + 22,588) - 48 \right\} \sqrt{\pi} = \frac{\varepsilon^2}{a} \{ 38,55 - 85,08 \} \\ = - \frac{\varepsilon^2}{a} \cdot 46,53.$$

nungsstelle bemessen zu können. Im übrigen werden nur die Koordinaten der Basisgruppe selbst benutzt, also unmittelbar gegebene Größen. Drücken sich die Atomabstände der Basisgruppe rational durch die Gitterkanten aus, so nimmt der Strukturfaktor eine beschränkte Reihe einfacher Werte an, wie in den beiden obigen Beispielen. Ob bei irrationaler Anlage der Basisgruppe die Schwierigkeiten bei meiner oder der Madelung'schen Methode geringer sind, kann nur der weitere Gebrauch der Methode lehren.

Anhang.

Berechnung des Integrals (27) $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{(0)}^E e^{-K^2 \varepsilon^2 + \frac{K^2}{4\varepsilon^2}} d\varepsilon.$

Unter E sei eine reelle Trennungsstelle, unter K gemäß der Konvergenzbetrachtung in III, 1 eine komplexe Größe verstanden, die in der

komplexen Ebene den Winkel φ mit der reellen Achse einschließt. Der Integrationsweg ist der in Fig. 1 beschriebene. Der Wert des $\int_{(0)}^{\infty}$ ist bekannt, wir berechnen statt (27) lieber

$$(I) \quad J = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_E^{\infty} e^{-K^2 \varepsilon^2 + \frac{K^2}{4\varepsilon^2}} d\varepsilon,$$

wobei die Integration auf der reellen Achse zu führen ist. Indem wir die Variable

$$\eta = R\varepsilon + i\frac{K}{2\varepsilon}, \quad \varepsilon = \frac{\eta}{2R} \pm \sqrt{\frac{\eta^2}{4R^2} - \frac{iK}{2R}},$$

$$d\varepsilon = \frac{1}{2R} \left(1 \pm \frac{\eta}{\sqrt{\eta^2 - 2iKR}} \right) d\eta$$

einführen, wird

$$J = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{iKR} \int_E^{\infty} e^{-\left(R\varepsilon + \frac{iK}{2\varepsilon}\right)^2} d\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{iKR}}{R} \int_{\left(RE + \frac{iK}{2E}\right)}^{\infty} e^{-\eta^2} \left(d\eta \pm \frac{\eta d\eta}{\sqrt{\eta^2 - 2iKR}} \right).$$

Wir führen das Gauss'sche Fehlerintegral ein:

$$\int_0^x e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \Phi(x) = \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} - \dots \right), \quad \Phi(\infty) = 1,$$

bemerkend, daß die zweite Integration der vorigen Gleichung sich auch darauf reduziert, indem gesetzt wird:

$$\eta^2 - 2iKR = \zeta^2,$$

wobei die Grenzen werden

$$\zeta = \pm \left\{ \left(RE - \frac{iK}{2E} \right) \right\}$$

und erhalten

$$(II) \quad J = \frac{e^{iKR}}{2R} \left\{ 1 - \Phi \left(RE + \frac{iK}{2E} \right) \right\} \pm \frac{e^{-iKR}}{2R} \left\{ 1 - \Phi \left(RE - \frac{iK}{2E} \right) \right\}.$$

Hierbei wurde für beide Grenzen von ζ das Vorzeichen + gewählt, was wegen des \pm vor dem Integral keine Beschränkung bedeutet.

Um das Vorzeichen zu bestimmen, vergleichen wir die Entwicklungen von (I) und (II) für kleines K . Nach der ersteren ist

$$J = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_E^{\infty} e^{-R^2 \varepsilon^2} \left(1 + \frac{K^2}{4\varepsilon^2} + \dots \right) d\varepsilon = \frac{1}{R} \left\{ 1 - \Phi(RE) \right\}$$

$$+ \frac{K^2}{2\sqrt{\pi}} \left\{ \frac{e^{-R^2 E^2}}{E} - \sqrt{\pi} R (1 - \Phi(RE)) \right\}$$

da nämlich

$$\int_E^\infty e^{-K^2 \varepsilon^2} \frac{d\varepsilon}{\varepsilon^2} = \left[-\frac{1}{\varepsilon} e^{-K^2 \varepsilon^2} \right]_E^\infty - 2K^2 \int_E^\infty e^{-K^2 \varepsilon^2} d\varepsilon \\ = \frac{e^{-K^2 E^2}}{E} - \sqrt{\pi} K (1 - \Phi(K E))$$

ist.

Bei der Entwicklung von (II) ist zu beachten, daß nach Taylor gilt

$$\Phi\left(R E + \frac{i K}{2 E}\right) = \Phi(R E) + \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-K^2 E^2} \frac{i K}{2 E} \\ - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot 2 R E \cdot e^{-K^2 E^2} \cdot \frac{1}{2!} \left(\frac{i K}{2 E}\right)^2 + \dots$$

Also wird aus (II)

$$J = \frac{1}{2 R} \left[e^{i K R} \left\{ 1 - \Phi(R E) - \frac{i K}{\sqrt{\pi} E} e^{-K^2 E^2} - \frac{K^2 R}{2 \sqrt{\pi} E} e^{-K^2 E^2} + \dots \right\} \right. \\ \left. \pm e^{-i K R} \left\{ \dots \right\} \right].$$

Das Glied mit dem unbestimmten Vorzeichen ist eine Wiederholung des ersten nach Abänderung von $+K$ in $-K$. Indem wir noch $e^{i K R}$ nach K entwickelt denken, suchen wir die von K freien Glieder heraus:

$$\frac{1}{2 R} \left[1 - \Phi(K E) \pm (1 - \Phi(R E)) \right]$$

und bestimmen danach das Vorzeichen zu $+$.

Es ist demnach

$$(III) J = \frac{\cos K R}{R} - \frac{1}{2 R} \left\{ e^{i K R} \Phi\left(R E + \frac{i K}{2 E}\right) + e^{-i K R} \Phi\left(R E - \frac{i K}{2 E}\right) \right\}$$

und das gesuchte Integral (27)

$$(IV) \left\{ \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{(0)}^E e^{-K^2 \varepsilon^2 + \frac{K^2}{4 \varepsilon^2}} d\varepsilon = i \frac{\sin K R}{R} + \frac{1}{2 R} \left\{ e^{i K R} \Phi\left(R E + \frac{i K}{2 E}\right) \right. \right. \\ \left. \left. + e^{-i K R} \Phi\left(R E - \frac{i K}{2 E}\right) \right\} \right\}.$$

Zusammenfassung.

Optische (elektrodynamische) und elektrostatische Potentiale für Kristallgitter sind zunächst gegeben als Summen von Einzelpotentialen, z. B. $\sum_P \frac{e_{P'}}{R_{PP'}}$ ($e_{P'}$ Ladung, $R_{PP'}$ Abstand des Gitterpunktes P' vom Aufpunkt P) (I). Man kann durch eine Integraldarstellung des Einzelpotentials (III, 2) $R_{PP'}^2$ in den Exponenten einer e -Funktion bringen und erhält durch Ausführung der Summe eine \mathcal{P} -Funktion von drei Variablen als

Integranden (III, 2). Für diese wird die Transformationsformel aufgestellt (II). Durch Anwendung der Transformation auf den Integranden gelangt man von der „d'Alembertschen“ zur „Fourierschen“ Darstellung des Potentials (III, 2), wenn auf dem ganzen Integrationsweg die transformierte ϑ -Funktion benutzt wird. Für die Konvergenz der Reihen ist es vorteilhaft, auf einem Teil des Integrationsweges die eine, auf dem andern Teil die andere Darstellung der ϑ -Funktion zu verwenden, unter Einführung einer Trennungsstelle E (bzw. dimensionslos η) (III, 2; IV, 1). Es wird ein allgemeiner gut konvergierender Ausdruck der elektrodynamischen Potentiale aufgestellt, der sich zur numerischen Rechnung eignet.

Spezialisierung dieses Ausdrucks auf elektrostatische Potentiale (IV, 1), ihre allgemeine Form. Beispielsweise Berechnung der Gitterenergie infolge der Coulombschen Kräfte zwischen den Ionen (Madelungsche Konstante) bei Steinsalz und Flußspat (IV, 2 u. 3).

München, Institut f. theor. Physik, August 1920.

(Eingegangen 7. August 1920.)

**4. Über die Ionisierungsarbeiten
und die Dissoziationsarbeit des Wasserstoffs;
von Thea Krüger.**

(Auszug aus der Dissertation.)

Die Bohrschen¹⁾ Überlegungen haben zur Aufstellung eines Atommodells geführt, das neben anderen Leistungen einen Zusammenhang zwischen der Energieübertragung durch stoßende Elektronen und den optischen Serien gibt. Das Atom besteht nach dieser Theorie aus einem positiven Kern, um den Elektronen kreisen. Wenn nun ein fremdes Elektron auf ein Atom mit einer solchen Geschwindigkeit stößt, daß seine Energie den Betrag $h\nu$ besitzt, wobei h das Plancksche Wirkungsquantum und ν die Frequenz irgendeiner Absorptionsserienlinie bedeutet, so kann ein kreisendes Elektron auf eine andere Quantenbahn gehoben werden. Auf dieser Bahn bleibt es nicht dauernd, sondern fällt auf die stabile Bahn, d. h. die Ruhebahn zurück und strahlt die dabei freiwerdende Energie in Form von Licht der Frequenz ν aus. Findet dieser Sprung von der Ruhebahn auf die erste mögliche Bahn statt, so wird beim Zurückfallen die langwelligste Linie der Hauptserie angeregt, das sogenannte Resonanzlicht. Die Spannung, die ein Elektron frei durchlaufen haben muß, um diese Strahlung anzuregen, ist als Resonanzpotential bekannt. Wird an das Atom die Energie $h\nu_\infty$ übertragen, wobei ν_∞ der kurzwelligen Grenzfrequenz der Absorptionsserie entspricht, so wird das Elektron ins Unendliche gehoben. Findet dieser Vorgang im elektrischen Felde statt, so wird dies Elektron sich nicht wieder mit dem Restatom vereinigen, und das Atom wird ionisiert. Die Energie $h\nu_\infty$ ist gleich der Ionisierungsspannung. Die der Absorptionsserie einatomiger Gase entsprechende Serie

¹⁾ N. Bohr, Phil. Mag. (1) 26. S. 476. 857. 1913; 27. S. 506. 1914; 30. S. 394. 1915; 29. S. 332. 1915.

des Wasserstoffs ist die Lymanserie. Das Resonanzpotential, welches das langwelligste Glied dieser Serie anzuregen vermag, beträgt nach der Bohrschen Theorie 10,1 Volt, während die Ionisierungsspannung des Atoms 13,5 Volt beträgt.

Das Molekül des Wasserstoffs besteht nach Bohr-Debye aus zwei positiven Kernen, um deren Verbindungslinie als Achse die beiden Elektronen auf einer gemeinschaftlichen Quantenbahn kreisen. Wenn ein Elektron entfernt wird, so ist der Rest nach der Theorie instabil. Positive Molekülionen sind danach nicht möglich, es müßte vielmehr sofort ein weiterer Zerfall in ein Atom und ein positives Atomion stattfinden. Bei der Abtrennung eines Elektrons von einem Wasserstoffmolekül würde also nicht nur die Ionisierungsarbeit, sondern auch die Dissoziationsarbeit geleistet werden müssen. Diese berechnet sich nach Bohr zu 60 000 cal entsprechend 2,6 Volt. Trotz großer Leistungen dieses Modells scheint es mit der Erfahrung nicht in Übereinstimmung zu bringen zu sein, denn Thomson¹⁾ hat bei Kanalstrahlen positive Molekülionen beobachtet, und ferner stimmt der berechnete Wert für die Dissoziationsarbeit durchaus nicht mit dem für diese Größe gemessenen überein, wie sich aus nachstehender Tab. 1 ergibt.

Tabelle 1.

Dissoziationsarbeit in Wasserstoff pro g Molekül.

| Verfasser | Wert in | |
|-------------------------------------|---------|------|
| | g-cal | Volt |
| Bohr | 60 000 | 2,6 |
| J. Langmuir ²⁾ | 84 000 | 3,6 |
| T. Isnardi ³⁾ | 95 000 | 4,1 |
| F. Herzfeld ⁴⁾ | 108 000 | 4,5 |

Nernst⁵⁾ pflegt in seinen Berechnungen 100 000 g-cal = 4,3 Volt als den wahrscheinlichsten Wert zu benutzen.

Schließlich ist H_2 nach dem Modell paramagnetisch, während er in Wirklichkeit diamagnetisch gefunden wird.

1) S. S. Thomson, Jahrb. d. Radioakt. u. Elektr. 8. S. 226. 1911.

2) J. Langmuir, Zeitschr. f. Elektroch. 23. S. 217. 1917.

3) T. Isnardi, Zeitschr. f. Elektroch. 21. S. 404. 1915.

4) F. Herzfeld, Ann. d. Phys. 59. S. 635. 1919.

5) W. Nernst, Grundlagen d. Wärmesatzes 1918.

Bisher sind eine Reihe Untersuchungen¹⁾ über die Ionisierung und Anregung von Resonanzlicht durch stoßende Elektronen in Wasserstoff gemacht worden, aber teils gestatten sie nicht zwischen Effekten, die durch Resonanzlicht und solchen, die durch Ionisation hervorgerufen sind, zu entscheiden, teils berücksichtigen sie bei der Deutung der Resultate nicht, daß die Elektronen Moleküle und nicht Atome treffen. Unter diesen Umständen schien es wünschenswert, den Wasserstoff nochmals zu untersuchen, und das geschah mit Hilfe einer Anordnung, die sich neuerdings bei derartigen Untersuchungen am besten bewährt hat.

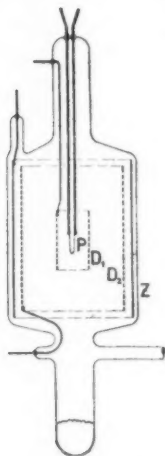


Fig. 1.

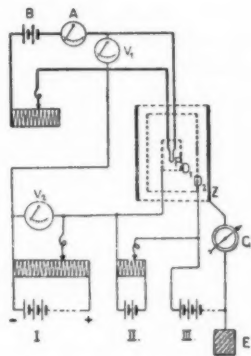


Fig. 2.

Den Versuchsaппarat zeigt Fig. 1. In einem Glasgefäß befindet sich in der Achse als Elektronenquelle ein Glühdraht P aus Wolframdraht, der konaxial von zwei Platindrahtnetzylindern D_1 D_2 und zuäuserst von einem Platinblechzylinder Z umgeben ist. Nach unten mündete das Gefäß in ein Rohr, das, mit flüssiger Luft gekühlt, zur Kondensation von Quecksilberdampf diente. Dieses Versuchsrohr stand ferner mit einem Mac Leodschen Manometer, einem Palladiumrohr zum Einlassen von Wasserstoff und einer Dampfstrahlpumpe nach

1) Lit. vgl. bei J. Franck u. G. Hertz, Phys. Zeitschr. 20. S. 132. 1919.

Vollmer und einem Glasgefäß mit Helium in Verbindung. Das Helium wurde durch vorher ausgeglühte, in flüssiger Luft befindliche Kohle zu jedem Versuch eigens gereinigt.

In Fig. 2 stellt $P D_1 D_2 Z$ die Metallteile des eben geschilderten Versuchsapparates dar und zeigt weiter die Schaltung der Versuchsanordnung. Oben ist der Heizstrom für den Glühdraht zu sehen, bestehend aus der Batterie B , einem Schiebewiderstand, dem Amperemeter A und dem Voltmeter v_1 . Unten sind drei Batterien I, II, III gezeichnet, die die Spannungen zum Beschleunigen oder Verzögern der Elektronen im Versuchsrohr liefern. I ist eine Batterie von 30–40 Volt, die durch einen Widerstand von 7000 Ohm geschlossen war. Der Glühdraht ist mit dem negativen Pol der Batterie verbunden, der Zylinder D_1 mit dem Schieber des Widerstandes, so daß die Spannung zwischen $P D_1$, die am Voltmeter v_2 gemessen wurde, in kleinen Beträgen veränderlich ist. Batterie II legt mittels des Schiebewiderstandes eine Spannung zwischen D_1 und D_2 . Zwischen D_2 und Z befand sich die dritte Batterie III. Ein Pol dieser Batterie lag an Erde, während alle anderen Batterien und Instrumente isoliert standen. Der Zylinder Z war durch das Galvanometer geerdet. Es wurden nach Bedarf zwei Galvanometer von 10^{-9} und $5 \cdot 10^{-11}$ verwendet. Die Abstände zwischen den Metallteilen des Versuchsgefäßes waren so gewählt, daß bei den hier zur Anwendung gelangten Drucken die Entfernungen $P D_1$ und $D_2 Z$ kleiner oder gleich groß waren, als eine freie Elektronenweglänge, während die Entfernung $D_1 D_2$ stets mehrere freie Elektronenweglängen betrug.

Es wurden im wesentlichen zwei Schaltungen angewendet, welche J. Franck und P. Knipping¹⁾ bei ihren Untersuchungen an Helium angewandt haben. Die Schaltungen haben das variierbare, die vom Glühdraht ausgesandten Elektronen beschleunigende Feld zwischen $P D_1$ gemeinschaftlich.

Bei der ersten Methode betrug das Feld zwischen $D_1 D_2$ 0,2–0,8 Volt und war so gerichtet, daß D_1 positiv, D_2 negativ war. Ein zweites starkes Feld lag zwischen D_2 und Z so, daß das Potential von Z negativ gegen das von D_2 war. Die

1) J. Franck und P. Knipping, Phys. Zeitschr. 20. S. 48. 1919.

Wirkungsweise ist folgende: Die Elektronen werden mit einer Geschwindigkeit, die der zwischen $P D_1$ angelegten Spannung entspricht, in den Raum $D_1 D_2$ treten und dort überall mit den Molekülen Zusammenstöße erleiden. In den Raum $D_2 Z$ werden sie zwar eindringen, aber den Zylinder Z nicht erreichen, solange die sie beschleunigende Spannung kleiner ist als die Summe der beiden Gegenfelder zwischen $D_1 D_2$ und $D_2 Z$. Werden in dem Raum $D_1 D_2$ positive Ionen bei Ionisation des Gases durch eindringende Elektronen erzeugt, so werden die positiven Ionen nach D_2 und weiter durch das starke Feld auf den Zylinder Z gezogen. Das Galvanometer wird dann einen positiven Strom anzeigen, der mit wachsender Spannung ansteigt, und dieser Anstieg wird sich bei jeder neuen Ionisationsstufe verstärken, wenn man die beschleunigende Voltzahl als Abszisse, die Galvanometerausschläge als Ordinate aufträgt. Wird durch die Elektronenstöße Resonanzlicht angeregt, so werden die an den Netzen lichtelektrisch ausgelösten Elektronen durch das Gegenfeld gehindert, den Zylinder zu erreichen, aber die am Zylinder durch das ultraviolette Licht ausgelösten Elektronen werden durch das starke Feld sofort entfernt, und dieser wird sich positiv aufladen. Es wird ebenfalls ein verstärkter Anstieg in der Stromspannungskurve genau wie bei jeder Ionisationsstufe auftreten mit dem einzigen Unterschied, daß der durch Licht bewirkte Stromstieg sehr viel schwächer ist als der durch Ionisation hervorgerufene. Denn bei der Ionisation erzeugt jeder wirksame Stoß ein Ionenpaar, während das Licht, das ein einziges erregtes Atom ausstrahlt, nur zum Teil vom Zylinder absorbiert wird und ein Elektron auslöst. Bei dieser Schaltung werden Kurven, wie sie in Fig. 3—5 zu sehen sind, erhalten.

Hierbei sind die Spannungsangaben indessen mit Fehlern behaftet, welche von der Austrittsgeschwindigkeit der Elektronen aus dem Glühdraht, dem Spannungsabfall an diesem und etwaigen Kontaktpotentiale an den Drahtnetzen herrühren. Um diese Fehler zu eliminieren, dienen zwei Verfahren. Das erste besteht darin, daß man dem Wasserstoff ein Gas (Helium) zumischt, dessen Resonanz- bzw. Ionisierungsspannung genau bekannt ist. Alsdann treten in den Kurven neben den Wasserstoffknicken die Knicke des zweiten Gases auf, diese dienen

zur Eichung der Voltkala. So entstehen z. B. in Kurve 48 (Fig. 3) die Knicke bei 15,6 und 19,1 Volt. Der zweite Wert entspricht der Resonanzspannung des Heliums, die zuerst von Franck und Hertz gemessen, durch die Untersuchungen von J. Franck und P. Knipping einerseits, Franck-Horton und Ann. Davis¹⁾ andererseits sehr genau auf 20,5 Volt gelegt ist. Die abgelesene Spannung ist also um $20,5 - 19,1 = 1,4$ Volt zu klein und der bei 15,6 Volt abgelesene Wert liegt korrigiert bei 17,0 Volt.

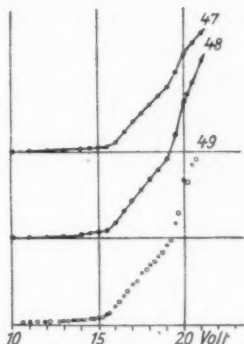


Fig. 3.

Die zweite Methode zur Bestimmung der wahren Spannungswerte besteht darin, daß man die Spannung bestimmt, gegen welche die vom Glühdraht ausgesandten Elektronen anlaufen können. Man wählt zu diesem Zweck das Feld zwischen D_2 und Z um einige Volt höher als die Spannung, bei welcher ein zu untersuchender Knick in der Kurve auftritt. Die vom Glühdraht ausgesandten Elektronen werden dann so lange nicht auf den Zylinder gelangen können, als ihre Geschwindigkeit kleiner ist, als die Summe der beiden verzögernden Spannungen zwischen D_1 D_2 und D_2 Z . Erst im Augenblick, wo beide gleich sind, wird dies eintreffen. Der durch positive Aufladung des Zylinders bewirkte Anstieg wird unterbrochen. Natürlich ist diese Methode nur bei solchen Drucken anwendbar, bei denen wenigstens einige der vom Glühdraht emittierten Elektronen die Strecke zwischen Glühdraht und Zylinder ohne Zusammenstoß mit Molekülen durchfliegen. In Fig. 4 sind zwei solcher Kurven zu sehen. Bei der linken Kurve findet ein Anstieg bei 16,5 Volt statt und eine Umkehr bei 19,5 Volt (über die Art der Ablesung bei den Knickpunkten wird unten ausführlich zu reden sein). Da das gesamte verzögernde Feld 20,0 Volt betrug, ist die am Voltmeter abgelesene beschleunigende Spannung um 0,5 Volt zu klein. So kommt der Wert

1) T. Horton u. Ann. Davis, Proc. Roy. Soc. 95. S. 408. 1919.

bei 16,5 auf 17,0 Volt. Die rechte Kurve zeigt einen Anstieg in der Gegend von 28,8 Volt. Das verzögernde Feld betrug 37,2 Volt, wurde aber bei 36,0 Volt abgelesen. Also ist die abgelesene Beschleunigung um 1,2 Volt zu klein und der bei 28,8 Volt gefundene Anstieg der Kurve liegt bei 30,0 Volt.

Die hier gezeichneten Kurven, die zur Veranschaulichung der Auswertung dienen und aus einem sehr großen Material entnommen sind, lassen erkennen, daß es nicht ganz einfach ist, die Punkte genau zu bestimmen, bei denen wesentliche Richtungsänderungen stattfinden. Die nachfolgende Betrachtung

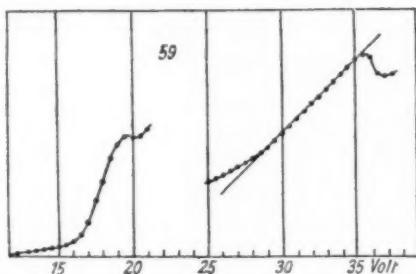


Fig. 4.

wird hierüber Klarheit schaffen und ein Mittel an die Hand geben, jene Punkte genau und einwandfrei festzulegen. Wie man sieht, ergibt sich meist kein scharfer Knick, sondern er ist etwas abgerundet, so daß das vor dem Knick liegende geradlinige Stück der Kurve durch einen manchmal über 1—2 Volt sich erstreckendes bogenförmiges Stück mit dem hinter dem Knick liegenden geradlinigen Stück der Kurve verbunden ist. Die Elektronen haben, wie bereits gesagt, keine einheitliche Geschwindigkeit, sondern diese zeigt eine Verteilung, die einmal von der verschiedenen Austrittsgeschwindigkeit weiter vom Spannungsabfall im Glühdraht herrührt. Diese Geschwindigkeitsverteilung bedingt, daß kein scharfer Knick in der Kurve entsteht, sondern daß der Anstieg (Abfall) durch ein bogenförmiges Stück eingeleitet ist. Man wird daher den gesuchten Punkt als den Schnittpunkt der Tangenten ermitteln, die man als Verlängerung der im wesentlichen geradlinigen Teile der

Kurve vor und nach dem bogenförmigen Stück an dieses legen kann. Daß bei 30 Volt dieses bogenförmige Zwischenstück nicht so deutlich zu sehen ist, liegt daran, daß hier die Richtungsänderung überhaupt viel geringer ist. Umgekehrt ist das bogenförmige Stück bei Umkehrpunkten besonders ausgeprägt. (Fig. 4 rechts, wo eine Tangente auch eingezeichnet ist.)

Ein Punkt verdient besondere Erwähnung. Es wäre nicht ausgeschlossen, daß sich Kontaktpotentiale während der Messung geändert haben könnten. Daß dies nicht der Fall ist, sieht man an Kurve 49, Fig. 3, in der die ausgefüllten Punkte bei

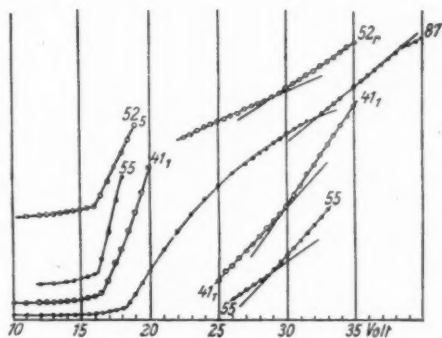


Fig. 5.

der Messung von kleinen zu großen Geschwindigkeiten, die Kreise beim Rückgang bestimmt sind.

Während Fig. 3 eine Anzahl von Werten (korrigiert mit Hilfe der ersten Methode) in der Gegend von 17 Volt, Fig. 4, einen Wert in der Gegend von 17 und 30 Volt (korrigiert nach der zweiten Methode) zeigt, sind in Fig. 5 eine Anzahl von Werten bei 17 und 30 Volt dargestellt. Sie dienen zur Bestimmung des bei 30 Volt liegenden Wertes, nach dem der bei 17 Volt liegende Wert durch frühere Messungen auf $17,1 \pm 0,25$ Volt festgelegt ist.

Abgesehen von diesen beiden ausgezeichneten Punkten wurde festgestellt, daß sich bereits in der Gegend von 11 bis 12 Volt ein ganz kleiner Galvanometerausschlag in Überein-

stimmung mit den früheren Untersuchungen, ferner die Andeutung eines Knickes zwischen 13 und 14 Volt ergaben. Letztere durften mit dem von Bergen-Davis und Goucher¹⁾ gefundenen Wert von 13,6 Volt zu identifizieren sein. Die nachstehende Tab. 2 gibt eine Übersicht über die erhaltenen Werte, wobei zu bemerken ist, daß nur einwandfreie Kurven berücksichtigt worden sind, d. h. solche, bei denen sich die Lage der Knickpunkte deutlich aus den Kurven entnehmen ließ. In Spalte 2 ist das Gewicht der Messung angegeben, Spalte 3 und 4 weisen den bereits korrigierten 17 bzw. 30 Volt-Wert nach, während Spalte 5 die Methode angibt, nach welcher die Spannungskorrektur ausgeführt wurde. Eine Mittelwertsbildung über die Spalten 3 und 4 liefert $17,1 \pm 2,5$ Volt und $30,4 \pm 0,5$ Volt.

Tabelle 2.

| Nr. | Gewicht | Werte bei | | Korrigiert nach Methode |
|------------------|---------------|-----------|---------|----------------------------|
| | | 17 Volt | 30 Volt | |
| 36 | 1 | | 30,35 | 1 |
| 38 | $\frac{1}{2}$ | | 30,0 | 1 |
| 40 | 1 | 17,0 | | 1 |
| 41 ^I | 1 | | 30,2 | 1 |
| 42 | 1 | 17,0 | | 1 |
| 43 | 1 | 17,1 | | 1 |
| 44 | 1 | 17,1 | | 1 |
| 46 ^I | 1 | 17,0 | | 1 |
| 47 | 1 | 17,2 | | 1 |
| 48 | 1 | 17,0 | | 1 |
| 49 | 1 | 16,9 | | 1 |
| 51 ^{II} | 1 | | 30,6 | 1 |
| 52 | 1 | | 30,1 | 1 |
| 55 | 1 | | 29,7 | 1 |
| 57 | $\frac{1}{2}$ | | 31,0 | 2 |
| 59 ^I | 1 | 17,1 | | 2 |
| 59 ^{II} | 1 | | 30,0 | 2 |
| 60 | 1 | 17,1 | | 2 |
| 87 ^I | 1 | | 30,8 | 1 u. 2 |
| 80 | 1 | | 31,1 | 1 u. 2 |

Die Stärke der Anstiege bei 17,1 Volt und 30,4 Volt lassen dort Ionisation vermuten, jedoch mußte dies bestätigt und auch bei den Werten um 11 und 13 Volt festgestellt

1) Bergen-Davis und Goucher, Phys. Rev. 10. S. 84. 1917.

werden, ob sie durch Ionisation oder durch Lichterregung hervorgerufen seien. Hierzu wurde die von Bergen-Devis und Goucher angegebene Methode verwandt. Die ganze Apparatur blieb dieselbe, nur daß das zwischen D_1 und D_2 liegende Feld eine Größe von 36 Volt hatte und so gerichtet war, daß D_2 negativ gegenüber D_1 wurde, während das zwischen D_2 und Z liegende Feld von 10 Volt Z ein positives Potential gegenüber D_2 gab. Die Spannung zwischen Glühdraht und D_1 wurde in Stufen von ganzen oder halben Volt verändert. Erzeugen jetzt die primären Elektronen in dem Raum zwischen D_1 D_2 Ionen, so werden diese nach D_2 hingezogen. Durchfliegen sie dabei eine Spannung von 10 Volt ohne Zusammenstöße mit Molekülen, so werden sie gegen das Feld zwischen D_1 Z anlaufen können und auf den Zylinder gelangen. Das mit diesem verbundene Galvanometer wird einen Ausschlag zeigen, der positiver Aufladung entspricht. Regen die stoßenden Elektronen Resonanzlicht an, so werden dadurch Elektronen an D_2 ausgelöst. Diese werden zum Teil durch das Feld sofort nach Z gezogen. Das Galvanometer zeigt einen Ausschlag, der negativer Aufladung entspricht. Man wird also zwischen Aufladung, die durch Ionisation und solcher, die durch Resonanzlicht hervorgerufen ist, unterscheiden können. Bei den Versuchen zeigt sich, daß die Werte bei 17 und 30 Volt durch Ionisation hervorgerufen sind, und ferner ergibt sich, daß unter verschiedenen Bedingungen stets etwas wechselnde Resultate erhalten wurden, so daß diese Kurven nicht zur zahlenmäßigen Auswertung gebraucht werden konnten. Von Interesse ist es, daß sich bei 11 Volt eine schwache Ionisation und zwischen 13 und 14 Volt eine Lichterregung aus den Kurven entnehmen läßt, was mit den Resultaten von Bergen-Davis und Goucher in Übereinstimmung steht. In Fig. 6 sind drei Beispiele solcher Kurven gegeben. Werte oberhalb der Achse zeigen positive Ausschläge des Galvanometers, die einer Ionisation entsprechen, an, Werte unterhalb der Achse Lichterregung. Kurve 1 ist bei einem Druck von 0,025 mm Quecksilber gemessen und zeigt bei 11 Volt eine schwache Ionisation. Bei der zweiten Kurve herrscht ein Druck von 0,04 mm Quecksilber. Dabei ist der positive Ausschlag 11 Volt erheblich kleiner geworden,

bei 13 Volt beginnt ein Absinken der Kurve zu negativen Werten entsprechend einer Lichterregung, bei 15 Volt setzt wieder ein starker Anstieg zu positiven Werten ein. Kurve 3,

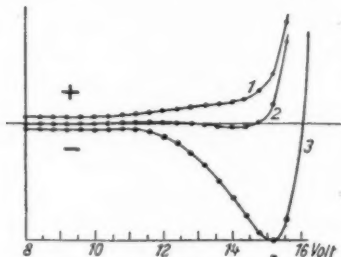


Fig. 6.

die bei 0,08 mm Quecksilber gemessen ist, zeigt kaum noch die erste Ionisation. Der Abfall zu negativen Werten beginnt schon bei 11 Volt, um bei 13 Volt stärker zu werden. Die starke Ionisation macht sich bereits wieder bei 15 Volt bemerkbar. Man sieht aus den Kurven, daß die Ionisation bei 11 Volt mit wachsendem Druck kleiner wird, um schließlich ganz zu verschwinden, während die Hauptionisierungsstufe diese starke Druckabhängigkeit nicht zeigt. Da ein Druckeinfluß nur in der Verkürzung der freien Weglänge der positiven Ionen seinen Grund haben kann, die bei Zusammenstoßen soviel an Energie verlieren, daß sie nicht mehr gegen das zwischen D_2 und Z gelegene Gegenfeld anlaufen können, so sieht man, daß bei 11 Volt Ionen gebildet werden, deren mittlere freie Weglänge wesentlich kleiner ist als die Weglänge der bei höherer Spannung gebildeten Ionen. Auffällig ist ferner, daß, selbst wenn man die geringere Genauigkeit in Betracht zieht, mit der sich in diesen Kurven die Knickpunkte bestimmen lassen, die starke Ionisation bei merkwürdig niedrigen Drucken einsetzt. Sie sollte nach obigem bei 17 Volt liegen und findet sich schon bei Werten bis zu 15 Volt herab. Bergen-Davis und Goucher haben nach diesem Verfahren die Ionisierungsspannung bestimmt und geben 15,8 Volt als Wert für diese an. Letzterer deckt sich bei Zulassung großer Schwankungen mit dem, der dieser Methode zu entnehmen ist,

steht aber im Widerspruch zu den oben gefundenen Resultaten, denen eine wesentlich größere Genauigkeit zuerteilt werden muß. Der Grund für diese Umstimmigkeit scheint in einem prinzipiellen Fehler der eben besprochenen Methode zu liegen, der es mit sich bringt, daß sie nur qualitative Unterscheidung zwischen Ionisation und Strahlung zuläßt, aber nicht zu einer scharfen Bestimmung der Ionisierungsspannung führt. In der Überlegung ist nämlich anscheinend übersehen worden, daß die bei etwa 13 Volt lichtelektrisch ausgelösten Elektronen nur zum Teil auf den Zylinder gezogen werden, zum andern Teil jedoch nach D_1 hin beschleunigt werden. Hierbei können sie durch das starke Feld zwischen D_1 und D_2 so große Geschwindigkeiten erreichen, daß sie ihrerseits H_2 -Moleküle ionisieren können. Daher kann dann ein positiver Galvanometerstrom entstehen, ehe die Geschwindigkeit der Primärelektronen den zur Ionisation notwendigen Wert erreicht hat. Die Umkehr der Kurve wird in dem Augenblick einsetzen, wo die sekundäre Ionisation den lichtelektrischen Strom überwiegt; den Beginn einer lichtelektrischen Erregung durch Elektronenstoß vermag jedoch diese Methode mit genügender Genauigkeit anzuzeigen.

Faßt man die Ergebnisse aller in dieser Arbeit gemachten Messungen zusammen, so erhält man folgende Resultate:

Bei $11,5 \text{ Volt} \pm 0,7$ findet sich schwache Ionisation und schwache ultraviolette Strahlung,

bei $13,6 \pm 0,7$ Volt starke Strahlung (Absolutwert nach Bergen-Davis und Goucher),

bei $17,1 \pm 0,25$ Volt erste starke Ionisation,

bei $30,4 \pm 0,5$ Volt zweite starke Ionisation.

Wenn man nun daran geht, die so erhaltenen Werte unter Zugrundelegung der Bohrschen Theorie zu deuten, so muß man sich fragen, welche Änderungen am Molekül durch Elektronenstöße vor sich gehen können. Besonders muß man beachten, daß eine Energieübertragung nie direkt an das Atom stattfinden kann, sondern daß die Elektronen auf Moleküle treffen, und Anregung von Elektronensprüngen am Atom also auch Ionisation oder Anregung von Resonanzlicht an

Atomen nur bei gleichzeitiger Dissoziation der Moleküle eintreten kann. Bei H_2 sind folgende Fälle zu unterscheiden.

1. Sind Molekülionen möglich, so wird bei der dazu notwendigen Ionisierungsspannung ein Elektron aus dem Molekül entfernt werden und ein positives Molekülion entstehen.

2. Absorbiert ein Molekül eine Energie, die gleich der Summe von Resonanzpotential R und Dissoziationsarbeit D ist, so wird ein neutrales und ein erregtes Atom entstehen. Dies ist die kleinste Energie, bei der Lichtemission am Atom auftritt.

3. Absorbiert ein Molekül eine Energie, die gleich der Summe von Dissoziationsarbeit und Ionisierungsspannung I ist, so entsteht ein neutrales Atom und ein Atomion. Dies ist die kleinste Energie, bei der positive Wasserstoffatomionen auftreten können.

4. Absorbiert ein Molekül eine Energie, die gleich der Summe $I + R + D$ ist, so entsteht ein Ion und ein erregtes Atom.

5. Absorbiert ein Molekül eine Energie, die gleich der Summe $D + 2R$ ist, so entstehen zwei erregte Atome.

6. Absorbiert ein Molekül eine Energie, die gleich der Summe $D + 2I$ ist, so entstehen zwei Atomionen und zwei Elektronen. Hier tritt eine neue starke Ionisationsstufe auf.

Theoretisch müßten alle diese Möglichkeiten auftreten können. Jedoch werden nach den bei Helium und Quecksilber gemachten Erfahrungen, die unter 4. und 5. genannten Vorgänge sich nur bei Anwendung besonders empfindlicher Methoden nachweisen lassen.

Sieht man sich nun die durch die vorliegenden Versuche genau bestimmten Werte an, so findet man die erste starke Ionisation bei 17,1 Volt. Wird dieser Betrag mit der Summe von Ionisierungsarbeit und Dissoziierungsarbeit am Molekül identifiziert, so erhält man

$$17,1 \text{ Volt} = I + D.$$

Die zweite starke Ionisation findet sich bei 30,4 Volt, woraus in gleicher Weise folgt:

$$30,4 \text{ Volt} = 2I + D.$$

Aus beiden Gleichungen ergibt sich für I 13,3 Volt \pm 0,25 Volt. Da dieser Wert innerhalb der Fehlergrenze mit dem von

Bohr berechneten Wert für I von 13,5 Volt übereinstimmt, so wird man letzteren zur Bestimmung der Dissoziationsarbeit zugrunde legen. Führt man I in die beiden obigen Gleichungen ein, so erhält man:

$$17,1 - 13,5 = 3,6 \text{ Volt und}$$

$$30,4 - 27,0 = 3,4 \text{ Volt.}$$

Zur Mittelwertbildung wird man den ersten entsprechend der genaueren Bestimmung des Wertes von 17,1 Volt das doppelte Gewicht gegenüber dem zweiten geben und findet so:

$$D = 3,53 \pm 0,3 \text{ Volt}$$

oder in Grammkalorien pro Grammolekül

$$D = 81300 \text{ g-cal} \pm 5700 \text{ g-cal.}$$

Dieser Wert stimmt innerhalb der Beobachtungsfehler mit dem neuesten von Langmuir gefundenen überein, wie aus der Tab. 1 hervorgeht. Er ist daher nicht mit dem aus dem Bohr-Dedyschen Molekülmodell berechneten Wert in Einklang.

Die bei 13,6 Volt gefundene Strahlung entspricht dann dem unter 2 geschilderten Vorgang. Setzt man für das Resonanzpotential den aus der ersten Absorptionsserienlinie berechneten Wert von 10,1 Volt ein, so ergibt sich für D :

$$D = 13,6 - 10,1 = 3,5 \text{ Volt.}$$

Dieser Wert stimmt mit dem oben gefundenen gut überein, doch wurde er zur Mittelwertbildung nicht verwendet, weil eine genaue Bestimmung im Rahmen dieser Arbeit, wie oben ausgeführt, nicht vorgenommen wurde.

Es lag nahe, nachzuprüfen, ob bei Elektronen, die mit einer Energie von 3,5 Volt auf Moleküle stoßen, Energieverlust entsprechend einer Dissoziation in Atome stattfindet. Dies war nicht der Fall und ist nach theoretischen Überlegungen auch nicht zu erwarten. Die Masse der Elektronen, verglichen mit der des positiven Kernes ist nämlich so klein, daß nach dem Impulssatz beim Zusammenstoß nur ein kleiner Energiebetrag direkt an den Kern abgegeben werden kann. Die Energie wird also bei Zusammenstößen zwischen langsamen Elektronen und Molekülen nur durch Übertragung an ein Elektron des Molekülverbandes diesem zugeführt werden können. Daher wird die Dissoziation durch Elektronenstöße

nur bei gleichzeitiger Ionisation oder Erregung eines Atoms stattfinden können.

Es muß nun noch die schwache, bei 11 Volt auftretende Ionisation besprochen werden. Quecksilber kommt wegen der starken Kühlung mit flüssiger Luft wohl kaum in Frage. Es wurde daher dieser Wert versuchsweise der Ionisation des Wasserstoffmoleküls von H_2^+ -Ionen zugeschrieben. Zu dieser Annahme gibt auch der vorher erwähnte aus der starken Druckabhängigkeit folgende große Ionendurchmesser Anlaß, denn ohne daß man auf nähere Vorstellungen über das Modell des H_2 -Ions eingeht, ist es klar, daß diesem ein Radius zukommen muß, der groß ist, verglichen mit dem des bei 17,1 Volt sich bildenden H^+ -Atomions, das ja nur aus einem positiven Kern besteht.

Es soll zum Schluß noch gezeigt werden, daß die hier gefundenen Werte der Ionisation in Wasserstoff zum mindesten keine Widersprüche mit den Werten ergeben, welche aus Untersuchungen über Gasentladung gewonnen sind.

Der Anodenfall, die Spannung zwischen Anode und anodischem Glimmlicht ist gedeutet worden als Potentialdifferenz, welche die Elektronen durchfallen haben müssen, um positive Ionen an der Anode frei zu machen. Da diese nach J. Stark hauptsächlich aus dem an der Anode okkludierten Gase stammen, so wird (abgesehen von Änderungen, die eben durch die Okklusion entstehen) eine Übereinstimmung von normalem Anodenfall und Ionisierungsspannung zu erwarten sein. Skinner¹⁾ hat eingehende Messungen des normalen Anodenfalles vorgenommen und in Wasserstoff als kleinsten Wert 17,3 Volt in Übereinstimmung mit den hier vorliegenden Messungen der Ionisierungsspannung gefunden.

Weiterhin hat man oft die Anschauung der Identität von Schichtpotentialdifferenz und Ionisierungsspannung vertreten. In einer neueren Arbeit findet Neubert²⁾ in Übereinstimmung mit den hier gemachten Messungen Schichtpotentiale in Wasserstoff zwischen 11 und 31 Volt. Wenn auch Neubert andere Anschauungen über die verschiedenen Ionisierungsvorgänge

1) Skinner, Phil. Mag. 8. S. 337. 1904.

2) P. Neubert, Ann. d. Phys. 42. S. 1054. 1913. 53. S. 422. 1917.

vertritt, so hat er doch mit aller Deutlichkeit auf eine vermutliche Ionisierungsstufe des Wasserstoffs bei etwa 30 Volt hingewiesen.

Wesentlich schwieriger ist es, aus den in der Literatur angegebenen Beobachtungen über die Anregung der Spektren des Wasserstoffs einen Zusammenhang mit den hier vorliegenden Resultaten zu entnehmen. Beobachtungen hierüber liegen von J. Stark¹⁾ vor. Er findet bei spektographischen Aufnahmen an den positiven Schichten von der Kathode aus gerechnet, zuerst ein kontinuierliches Spektrum, dann die Linien der Balmerserie und unmittelbar darauf das Viellinienspektrum. Neubert fand in den roten Schichten ein starkes Viellinienspektrum ohne Angabe zu machen, ob dabei auch das Balmerpektrum auftritt. Bei den blauen Schichten niedriger Potentialdifferenz tritt nach ihm das kontinuierliche Spektrum schwach auf, das Balmerpektrum wird von einzelnen Linien des Viellinienspektrums noch überstrahlt. Bei den bekannten Gehrke-Seeligerschen²⁾ Versuchen wurde die Balmerserie schnelleren, das Viellinienspektrum langsameren Elektronen zugeordnet, ohne daß Angaben über den absoluten Wert der Elektronengeschwindigkeit gemacht würden. Es liegt ferner eine Reihe von Versuchen vor, bei denen die Geschwindigkeit der das Leuchten anregenden Elektronen direkt gemessen wurde. Holtsmark³⁾ findet das Auftreten der Balmerserie von 17 Volt Strahlen an und eine von der Geschwindigkeit der Elektronen unabhängige Intensitätsverteilung der Serienlinien. Fulcher⁴⁾ findet die Balmerserie bei höheren Kathodenstrahlgeschwindigkeiten intensiver als das Viellinienspektrum. Schließlich sind noch Versuche von R. Holm und Thea Krüger⁵⁾ zu nennen, bei denen die Elektronen zwischen verschiedenen Netzen, deren Potentialdifferenzen bekannt waren, gemessen wurden. Es ergab sich von 13 Volt ab das kontinuierliche Spektrum, von 18 Volt ab das kontinuierliche und Viellinienspektrum, von 27 Volt ab die Linie H_{α} der Balmer-

1) J. Stark, Ann. d. Phys. 52. S. 221. 1917.

2) E. Gehrke u. R. Seeliger, Verh. d. Phys. Ges. 10. S. 1023. 1912.

3) J. Holtsmark, Phys. Zeitschr. 15. S. 606. 1914.

4) G. S. Fulcher, Phys. Zeitschr. 15. II. S. 1046. 1912.

5) R. Holm u. Th. Krüger, Phys. Zeitschr. 20. II. S. 1. 1919.

serie und von 30 Volt ab die anderen Linien der Balmer-serie. Faßt man die Resultate zusammen, so scheint, daß die meisten Autoren zu dem Resultate kommen, daß das Viellinienspektrum eine geringere Anregungsenergie als die Balmerserie braucht. Diese Tatsache ist wohl mit der allgemein vertretenen Deutung in Einklang, daß die komplizierteren Spektren wie das Viellinienspektrum und das sogenannte kontinuierliche Spektrum dem Wasserstoffmolekül zugeschrieben werden müssen, während die Serienspektren, entsprechend der Bohrschen Theorie, dem Atom zugehören.

Zusammenstellung der Resultate.

Die erste starke Ionisation in Wasserstoff findet bei $17,1 \pm 0,25$ Volt statt, die zweite bei $30,4 \pm 0,5$ Volt. Der erste Wert wird durch die Dissoziation des Moleküls und Ionisation eines Atoms erklärt, der zweite durch Dissoziation des Moleküls und Ionisation beider Atome. Auf Grund dieser Annahme wird die Dissoziationsarbeit aus diesen beiden Werten bestimmt. Sie ergibt sich zu $3,5 \pm 0,3$ Volt, entsprechend $81300 \text{ g-cal.} \pm 5700 \text{ g-cal.}$

Die von anderer Seite bei 11 und 13,5 Volt gefundenen Werte wurden innerhalb einer Fehlergrenze von 0,7 Volt bestätigt. Bei 11 Volt wurde schwache Ionisation, bei 13,6 Volt Strahlung gefunden. Die Lichterregung bei 13,5 Volt wurde der Dissoziierung des Moleküls bei gleichzeitiger Resonanzstrahlung eines Atoms zugeschrieben, die Ionisation bei 11 Volt wurde versuchsweise als Bildungsenergie von Wasserstoffmolekulation angenommen.

Die vorliegende Arbeit wurde auf Anregung und unter Leitung von Herrn Prof. J. Franck im Kaiser Wilhelm-Institut für physikalische Chemie und Elektrochemie, Berlin-Dahlem, ausgeführt. Ich bin Herrn Prof. Franck für weitgehende Hilfe bei den Untersuchungen und bei der Deutung der Resultate zu großem Danke verpflichtet.

(Eingegangen 12. August 1920.)

